Uniwersytet Wrocławski

Analiza aktuarialna a rozszerzone ryzyko w ubezpieczeniach na życie

Magdalena Homa

Wrocław 2020

Analiza aktuarialna a rozszerzone ryzyko w ubezpieczeniach na życie

Prace Naukowe
Wydziału Prawa, Administracji i Ekonomii
Uniwersytetu Wrocławskiego

Seria: **e-Monografie** Nr 178

Najwyższa kategoria naukowa A+

UCZELNIA BADAWCZA
INICJATYWA DOSKONAŁOŚCI

Dostęp online: https://www.bibliotekacyfrowa.pl/dlibra/publication/135576
DOI: 10.34616/23.21.006

Magdalena Homa
Uniwersytet Wrocławski
ORCID: 0000-0003-1735-5150

Analiza aktuarialna a rozszerzone ryzyko w ubezpieczeniach na życie

Wrocław 2020

Recenzenci: *prof. dr hab. Tadeusz Bednarski;*
dr hab. Patrycja Kowalczyk-Rólczyńska, prof. UEW

Korekta: *Magdalena Wojcieszak*
Projekt i wykonanie okładki: *Karolina Drozd*
Skład i opracowanie techniczne: *Aleksandra Kumaszka, eBooki.com.pl*

Druk: *Drukarnia Beta-druk, www.betadruk.pl*

Wydawca
E-Wydawnictwo. Prawnicza i Ekonomiczna Biblioteka Cyfrowa.
Wydział Prawa, Administracji i Ekonomii Uniwersytetu Wrocławskiego

ISBN 978-83-66601-40-6 (druk)
ISBN 978-83-66601-41-3 (online)

Spis treści

Wprowadzenie

W działalności ubezpieczeniowej ważne miejsce zajmują klasyczne ubezpieczenia na życie, dlatego metody analizy i oceny takich ubezpieczeń są dobrze znane i szeroko opisywane w literaturze. W praktyce zaś prawie każdy produkt ubezpieczeniowy oparty jest jedynie na modelowym kształcie ubezpieczenia tradycyjnego czy wielorakiego, a w rzeczywistości jest produktem bardziej złożonym. Większość firm ubezpieczeniowych, dostosowując się do potrzeb klientów i wzbogacając atrakcyjność swojej oferty, proponuje nowe oferty ubezpieczenia na życie z możliwością wykupu różnorodnych opcji mających na celu zapewnienie ochrony w przypadku różnych zdarzeń losowych. Tego typu umowy ubezpieczenia stanowią przykład **ubezpieczenia złożonego o rozszerzonym ryzyku ubezpieczeniowym**. W literaturze polskiej brak jest jednak wszechstronnej analizy formalnej ubezpieczeń tego typu, dlatego też stanowiło to przesłankę do opracowania monografii obejmującej kompleksową analizę ubezpieczeń o rozszerzonym ryzyku ubezpieczeniowym, która uzupełniałaby tę lukę.

Istotą przedstawionej w monografii analizy aktuarialnej jest rezygnacja z modeli deterministycznych na rzecz modeli probabilistycznych opartych na wykorzystaniu procesów stochastycznych, a wynika to z konieczności uwzględnienia dynamicznego podejścia do tego typu umów ubezpieczeniowych, uwzględniającego losowe jej uwarunkowania wynikające z procesu aktywizacji opcji, jak również jego wpływ na finansowy aspekt ryzyka. Tym samym **rozszerzone ryzyko w ubezpieczeniach na życie rozpatrzono w dwóch aspektach związanym z przedmiotem ubezpieczenia oraz finansowym**. Ryzyko związane z przedmiotem ubezpieczenia dotyczy oceny prawdopodobieństwa zajścia różnych przypadków życiowych w życiu człowieka i w tym zakresie zaadaptowano zaproponowane dotychczas podejścia do modelowania i analizy ubezpieczeń dotyczących wielorakich przypadków życiowych. Natomiast aspekt finansowy ryzyka dotyczy wycen przepływów pieniężnych dokonywanych przez ubezpieczyciela i występuje głównie w takich elementach jak: wycena ubezpieczenia, kalkulacja składek ubezpieczeniowych i rezerw matematycznych składek, analiza procesu ryzyka oraz szkodowości portfela. W tej analizie wykorzystano metodykę wyceny przepływów pieniężnych i ich wartości aktuarialnych zaproponowanych przez Norberga i Harrisona. Takie ujęcie problemu pozwoliło na określenie podstaw umożliwiających prawidłową wycenę przepływów pieniężnych, stanowiących podstawę dalszych kalkulacji, które umożliwiają ubezpieczycielowi prowadzenie działalności w tym zakresie i zapewniają jego wypłacalność. Przeprowadzona analiza stanowi połączenie zagadnień statystycznych, aktuarialnych i finansowych, pozwalających ubezpieczycielowi dokonać poprawnej wyceny ubezpieczenia o rozszerzonym ryzyku i oceny jego szkodowości. Książka składa się z siedmiu rozdziałów.

W **pierwszym rozdziale** przedstawiono zmiany organizacyjno-prawne i zasady funkcjonowania rynku ubezpieczeń w Polsce, jak również omówiono specyfikę ryzyka związanego z działalnością ubezpieczeniową.

W rozdziale drugim przedstawiono uogólniony model probabilistyczny ubezpieczenia złożonego o rozszerzonym ryzyku. Model ten jest formalną konstrukcją opisującą tego rodzaju ubezpieczenia. Ze względu na dynamiczny charakter aktywizacji opcji oraz uwarunkowania typu losowego za odpowiednie uznano procesy Markowa. Modele tego typu stanowią ramy modelowania losowego pewnego wzorca stanów, których doświadcza badana jednostka w określonym czasie. Ich największą zaletą jest elastyczność, która sprawia, że mają szerokie spektrum zastosowań. Od wielu lat modele wielostanowe oparte na procesach Markowa wywołują coraz większe zainteresowanie i znajdują zastosowanie właśnie w aktuariacie. W tym przypadku modelowany jest losowy wzorzec stanów, których doświadcza ubezpieczony w okresie obowiązywania umowy. Co ważne, w tym kontekście przejścia między stanami mają miejsce, gdy zdarzenie wywołuje określony przepływ finansowy pomiędzy stronami umowy, co jest równoważne z aktywizacją określonej opcji polisy ubezpieczeniowej. W tym ujęciu modele Markowa znajdują zastosowanie w ubezpieczeniach:

– zdrowotnych,
– opieki długoterminowej (LTC),
– rentowych,
– na życie.

W wielu opracowaniach dotyczących ubezpieczeń zdrowotnych, w tym w szczególności związanych z opieką długoterminową (LTC) czy rentowych, opracowano ramy wyceny przepływów pieniężnych i rezerw zarówno z procesem Markowa, jak semi-Markowa. Z drugiej strony modele Markowa pozwalają ująć również zmiany stanów będące wynikiem behawioralnych zachowań ubezpieczonych, np. związanych z zaprzestaniem opłaty składek w wyniku utraty pracy, zmianę wysokości składki czy rezygnację z ubezpieczenia.

W Polsce wszystkie wymienione typy ubezpieczenia stanowią odrębne grupy, ale w ramach Działu I Grupy 5 można rozważać je w ramach jednej kategorii jako ubezpieczenia wypadkowe i chorobowe będące uzupełnieniem ubezpieczeń na życie. Takie ujęcie przyjęto w monografii i zaproponowany ogólny model probabilistyczny obejmuje zmiany stanów wynikające zarówno ze zdarzeń losowych zachodzących w życiu ubezpieczonego, jak i jego zachowań behawioralnych. Takie ujęcie problemu umożliwia przeprowadzenie **analizy aktuarialnej ubezpieczeń o rozszerzonym ryzyku ubezpieczeniowym, na które składa się każde wydarzenie skutkujące zmianą przepływów pieniężnych związanych z tym ubezpieczeniem**.

Zastosowanie takiego modelu wiąże się z oszacowaniem prawdopodobieństwa i odbywa się to w sposób analogiczny jak w przypadku klasycznych modeli śmiertelności z wykorzystaniem równań Kołmogorowa-Chapmana. Wybór klasycznego modelu Markowa, w którym nie ma zależności od czasu trwania, pozwala na zachowanie prostoty obliczeń, jednak ponieważ proces ten ignoruje efekty minionej ścieżki życiowej, czyli czasów trwania, jest mniej praktyczny. Niestety brak dostępności do danych uniemożliwia zastosowanie procesów semi-Markowa. Rozważania dotyczące modeli Markowa i semi-Markowa i możliwości ich zastosowania m.in. w obszarze ubezpieczeń znaleźć można w wielu pracach, w szczególności: Hoema (1969), Andersena i in. (1991), Habermana, Pitacco (1998) i Hougaarda (1999). Późniejsze badania nad modelowaniem zachowań losowych ubezpieczających obejmują prace: Andersena, Keidinga (2002), Møllera, Steffensena (2002), Wolthuisa (2003) Janssena, Manki (2007), Christiansena (2010, 2012), Thomasa, Plancheta (2013). Jako przykład opracowań związanych z uzależnieniem od czasu trwania, czyli obejmujących zastosowanie modeli półmarkowskich, wymienić można np.: Czado, Rudolph (2002), Koller (2012), D'Amico, G., Guillen, M., Manca (2013), Buchardt i in. (2014, 2015), Biessy (2015).

Rozdział trzeci poświęcony jest wycenie ubezpieczenia złożonego obejmującej prawidłową wycenę wszystkich przewidzianych w tego typu umowie strumieni finansowych. Co ważne, w ostatnim dziesięcioleciu nastąpiły istotne zmiany w sposobie wyceny zobowiązań ubezpieczeniowych. Wynika to z pojawienia się takich systemów wypłacalności jak Solvency II czy C-ROSS, które bazują na założeniu, że wyceny powinny być oparte na rzeczywistym ryzyku i uwzględniać dostępne informacje dostarczane również przez rynki finansowe. Jedną z kluczowych zmian był wymóg określenia spójnych z rynkiem wartości dla zobowiązań ubezpieczeniowych w celu zagwarantowania lepszego dopasowania aktywów i zobowiązań oznaczających tzw. rynkową wycenę aktywów. Standardowa wycena aktuarialna opiera się przede wszystkim na argumencie dywersyfikacji, uzasadniającym stosowanie prawa wielkich liczb niezależnych ubezpieczających, którzy są narażeni m.in. na ryzyko związane z przedmiotem ubezpieczenia. Natomiast idea Solvency II i C-ROSS polega na ściślejszym uzależnieniu wyceny od wielkości ryzyka finansowego podejmowanego przez firmy ubezpieczeniowe i dlatego w niniejszej monografii zbadano tzw. rzetelną wycenę odpowiedzialności ubezpieczeniowej z uwzględnieniem przepływów pieniężnych w czasie ciągłym. Tym samym w przypadku ubezpieczeń złożonych oznacza to, że ustalając zaktualizowaną i aktuarialną wartość przepływów pieniężnych, konieczne jest uwzględnienie wpływu rozszerzonego ryzyka i wyznaczanie ich jako odpowiednich warunkowych wartości oczekiwanych. Wycena ta w przypadku analizowanych ubezpieczeń została przeprowadzona z uwzględnieniem procesu śmiertelności, historii procesu aktywizacji opcji, jak również z uwzględnieniem informacji dotyczących rynku finansowego:

– przyjętych stóp procentowych,
– decyzji finansowych ubezpieczyciela.

Należy zauważyć, że uwzględnienie złożonej filtracji procesów, w kontekście rozważanych ubezpieczeń o rozszerzonym ryzyku aktuarialnym, daje ramy wyceny, które łączą oba podejścia, uwzględniając zarówno względy aktuarialne, jak i rynkowe. Wskazując jednocześnie, że prawidłowa wycena to warunkowa wartość oczekiwana będąca sumą wartości aktuarialnej ryzyka dywersyfikowanego plus dodatkowy margines na pokrycie nie w pełni zdywersyfikowanego i niepodlegającego dywersyfikacji ryzyka.

Sprawiedliwa wycena zobowiązań ubezpieczeniowych, która łączy podejście zgodne z rynkiem i wycen aktuarialnych w kontekście ubezpieczeń zdrowotnych, LTC, rentowych, odpowiedzialności cywilnej itp., jest również badana w pierwszych pracach Norberga i Harrisona z lat 90. Rozważania tego typu kontynuowane były w późniejszych pracach: Bacinello (2003), Dahl, Moller (2006), Steffensen (2006), Pelsser (2010), Möhr (2011), AIA (2014), Pelsser i Stadje (2014), Buchardt i Moller (2013, 2015), Pelsser i Ghalehjooghi (2016), Dhaene i in. (2017), Engsner i in. (2018), Delong i in. (2019) oraz Barigou i in. (2019).

W **rozdziale czwartym**, wykorzystując wyniki rzetelnej, zgodnej z rynkiem i aktuarialnej wyceny strumieni przepływów pieniężnych w czasie ciągłym, zbadano proces zagregowanej wypłaty, inaczej nazywany procesem skumulowanych roszczeń, który stanowi istotny miernik oceny efektywności długookresowych decyzji finansowych. W celu zrozumienia charakterystyki zobowiązań z tytułu rozważanego ubezpieczenia na życie o rozszerzonym ryzyku, w szczególności przyszłych zobowiązań pieniężnych, istotne jest zbadanie ich rozkładu. W związku z tym, że najlepszym oszacowaniem zobowiązania jest wartość rynkowa, w pracy wyznaczono warunkową wartość oczekiwaną procesu zagregowanej wypłaty, ale w analizie uwzględniono również podstawowe charakterystyki funkcyjne rozproszenia, takie jak wariancja i odchylenie standardowe. Mierniki te pozwalają opisywać i mierzyć stopień „ryzykowności" tego typu umów ubezpieczenia i jako podstawowa miara ryzyka stanowić mogą informację o koniecznej korekcie wynikającej z rozszerzonego ryzyka, jakie podjął ubezpieczyciel w tego typu umowach. Ponadto formalnie wyprowadzono analityczną postać ich dystrybuanty, co pozwoliło uniknąć założeń dotyczących rozkładu szkód w dalszych analizach.

Kolejne **dwa rozdziały, piąty i szósty**, poświęcone są podstawowym kalkulacjom obejmującym wysokość składki netto oraz rezerwy matematycznej składek. Problem kalkulacji rezerw i ustalania sprawiedliwej ceny podejmowany jest przez wielu autorów zajmujących się ubezpieczeniami. Opracowania dotyczące tego problemu różnią się między sobą wyborem modeli finansowych i ubezpieczeniowych, celów cenowych czy strategii zabezpieczających, jak również zastosowanych technik matematycznych dostosowanych do rozważanego typu ubezpieczenia. Z drugiej strony wszyscy Autorzy są zgodni, że wycena zobowiązania ubezpieczeniowego (składka) może być przedstawiona jako:

– najlepszy szacunek i marża za ryzyko dodatkowe,
– wartość aktuarialna portfela inwestycyjnego dla zabezpieczanego ryzyka,
– wartość aktuarialna środków wykorzystanych na pokrycie ryzyka niepodlegającego zabezpieczeniu.

W niniejszej monografii wartości sprawiedliwe zobowiązań są wyznaczone jako najlepszy szacunek zobowiązania plus marża za ryzyko, ponieważ takie podejście jest zgodne ze stosowanymi w praktyce ubezpieczeniowej dwoma standardami wyceny rezerw: Solvency II i MSSF 17 IFRS. W obu standardach wyceny stosowane są terminy zwane:

– najlepszym oszacowaniem,
– marginesem ryzyka lub korektą ryzyka.

Terminy te są dobrze rozumiane w praktyce, jednak nie zawsze zostały w pełni sformalizowane z matematycznego punktu widzenia i badań nad tym, jak prawidłowo zdefiniować regułę wyceny dla poszczególnych typów ubezpieczenia, która prowadzi ostatecznie do najlepszego oszacowania.

Najlepszy szacunek w przypadku ubezpieczeń o rozszerzonym ryzyku odpowiada warunkowej wartości oczekiwanej przyszłych przepływów pieniężnych zdyskontowanych stopą procentową w celu odzwierciedlenia zmiany wartości pieniądza, z uwzględnieniem procesu aktywizacji opcji. Skorzystanie bowiem z którejkolwiek z opcji zmienia nie tylko strukturę przyszłych przepływów pieniężnych, ale również wrażliwość na zmiany stóp procentowych. Natomiast margines ryzyka jest dodawany jako korekta w celu ochrony ubezpieczyciela przed niekorzystnymi odchyleniami i zrekompensowania ubezpieczycielowi podjęcia dodatkowego ryzyka. Co ważne, korekta z tytułu ryzyka jest specyficzna dla danego ubezpieczyciela i może być swobodnie określona przez zakład zgodnie z:

– wyceną zmiennych przepływów pieniężnych z tytułu dodatkowych zobowiązań,
– wymogami kapitałowymi dotyczącymi wypłacalności w czasie ciągłym.

W przypadku ubezpieczeń złożonych korekta z tytułu ryzyka oznacza konieczność tworzenia dodatkowo tzw. kapitału podwyższonego ryzyka, który ma wystarczyć na pokrycie rzeczywistego ryzyka ubezpieczeniowego objętego ochroną, a jego wysokość wynika z wyceny zmiennych przepływów wynikających z dodatkowych zobowiązań.

W procesie kalkulacji składek, analogicznie jak w kontekście wyceny rezerw, obecne zmiany w zakresie zasad rachunkowości ubezpieczeniowej i wypłacalności wymuszają podejście uwzględniające rzeczywiste ryzyko determinowane nie tylko przez przypadki losowe zachodzące w życiu ubezpieczonego, ale również zachowania posiadacza polisy oraz ryzyko finansowe z tym ubezpieczeniem związane. Zatem składka ustalona jako sprawiedliwa cena za rzeczywiste ryzyko to warunkowa wartość oczekiwana ważona prawdopodobieństwem, która w przypadku ubezpieczeń o rozszerzonym ryzyku ubezpieczeniowym jest sumą dwóch składników przeznaczonych na pokrycie ryzyka wynikającego z podstawowej umowy ubezpieczenia oraz korekty wynikającej z rozszerzonego ryzyka związanego z tego typu polisami. Problem tworzenia rezerw matematycznych w zakresie szeroko pojętych ubezpieczeń podejmowali: Norberg (1995a, 2001, 2014), Norberg i Steffensen (2005), Møller i Steffensen (2007), Pelsser (2010), Pelsser i Stadje (2014), Christiansen i in. (2014), Happ i in. (2015), Pelsser i Ghalehjooghi (2016) oraz Engsner i in. (2018). Natomiast kalkulacje, których celem było ustalenie sprawiedliwej ceny za przyjęte ryzyko, podjęto m.in. w: Asmussen, Moller (2003), Dickson (2006), Bacinello i in. (2009), Christiansen (2007, 2012).

Ostatni rozdział książki to analiza „szkodowości" portfela ubezpieczyciela, która jest istotnym problemem z zakresu gospodarki finansowej ubezpieczyciela i, co ważne, ma stosunkowo duży wpływ na sposób zarządzania zakładem ubezpieczeń. Dzięki niej możliwa jest kontrola nad nadmiernym wzrostem odszkodowań zarówno w całym portfelu, jak i w poszczególnych produktach (grupach produktów) ubezpieczeniowych. W literaturze istnieją różne podejścia do tego zagadnienia. W tradycyjnym rozumieniu przez słowo „szkodowość" rozumie się wskaźnik szkodowości i jego konkretną wartość, która może stanowić bazę do oceny ryzyka. Zgodnie z rozporządzeniem Ministra Finansów z dnia 12 kwietnia 2016 r. wskaźnik szkodowości definiowany jest z uwzględnieniem odszkodowań i świadczeń (z uwzględnieniem zmiany stanu rezerw na niewypłacone odszkodowania i świadczenia) w stosunku do składki zarobionej w określonym czasie. Takie podejście oznacza, że szkodowość wyznaczana jest w ustalonym momencie trwania ubezpieczenia, natomiast w monografii, uwzględniając takie ujęcie problemu, zbadano szkodowość portfela rozumianego jako proces straty nazywanej również nadwyżką finansową ubezpieczyciela. Proces ten daje ważną informację o ryzyku finansowym, a ponadto stanowi podstawę analizy zasobów finansowych związanych z ubezpieczeniem.

Informacje te są niezwykle przydatne w długoterminowym planowaniu i dla zachowania wypłacalności ubezpieczyciela.

Ponieważ ideą powstania monografii było założenie zilustrowania dość trudnego matematycznie aktuarialnego i finansowego aspektu ubezpieczeń złożonych, osiągnięte wyniki teoretyczne zostały w każdym rozdziale zilustrowane przykładami tradycyjnych ubezpieczeń obejmujących ubezpieczenie na życie (UŻ) i dożycie (UD) oraz przykładami ich złożonych wariantów. Takie ujęcie sprawiło, że monografia adresowana jest do studentów kierunków ekonomicznych, matematycznych czy podyplomowych z zakresu ubezpieczeń, jak również może stanowić interesującą pozycję dla praktyków (aktuariuszy).

1. Rynek ubezpieczeń na życie

1.1. Zmiany organizacyjno-prawne na rynku ubezpieczeń

Historia polskiego rynku ubezpieczeń sięga czasów przedwojennych. Przed rokiem 1939 istniało 38 towarzystw ubezpieczeń wzajemnych, 72 prywatne firmy ubezpieczeniowe oraz 16 instytucji ubezpieczeniowych. Jednak po drugiej wojnie światowej działalność prowadziły już tylko dwa zakłady ubezpieczeń (Stroiński 1983):

- **Państwowy Zakład Ubezpieczeń** (PZU), który miał wyłączność na prowadzenie krajowych ubezpieczeń osobowych i majątkowych,
- **WARTA**, która miała wyłączność w zakresie dewizowych ubezpieczeń majątkowych i osobowych, a także reasekuracji.

Ze względu na wyznaczony zakres i podział działalności między te towarzystwa ubezpieczeniowe rynek został w sposób naturalny zdominowany przez PZU, który, co ważniejsze, funkcjonował jednocześnie jako integralna część administracji państwowej. W 1984 r. uchwalono ustawę o ubezpieczeniach majątkowych i osobowych (Ustawa 1984), którą dopuszczono tworzenie nowych towarzystw, ale warunkiem ich powstania było przyjęcie jednej z trzech form prawnych: zakładu państwowego, spółdzielni bądź spółki akcyjnej z większościowym udziałem Skarbu Państwa. Ustawa była przykładem na to, że pomimo ogromnych zmian polski rynek ubezpieczeniowy wciąż był bardzo ograniczony. Pierwsza zmiana tej ustawy miała miejsce w maju 1989 r. i była to nowelizacja (Ustawa 1989), która znosiła przede wszystkim ograniczenia związane ze strukturą własności powstających towarzystw ubezpieczeniowych i dopuszczała możliwość tworzenia niepaństwowych zakładów ubezpieczeniowych z polskim kapitałem prywatnym. Jednak już w roku 1988, czyli rok wcześniej, nastąpiło faktyczne złamanie monopolu na rynku ubezpieczeń w Polsce. Doszło wtedy do rejestracji towarzystwa ubezpieczeniowego o charakterze spółdzielni ubezpieczeniowej WESTA.

Z jednej strony nastąpiła więc liberalizacja struktury własności, z drugiej nie zmieniono zasadniczych przepisów regulujących zasady ich funkcjonowania, np. nie wprowadzono żadnych kryteriów licencjonowania, nie został rozwiązany problem sprawnego czy fachowego nadzoru nad rynkiem ubezpieczeń. W tej sytuacji tylko pozornie otwarto rynek ubezpieczeń na nowy kapitał i nowe rozwiązania, dopuszczając tylko ograniczoną konkurencję, co w rzeczywistości nie wzmacniało całego sektora. Zmiany ustrojowe w Polsce spowodowały konieczność przebudowy również systemu ubezpieczeń w Polsce i 28 lipca 1990 r. uchwalono nową ustawę o działalności ubezpieczeniowej (Ustawa 1990). W ustawie tej po raz pierwszy zostały określone podstawowe **zasady organizacji rynku ubezpieczeniowego i reasekuracyjnego**, do których należały:

– **otwarcie polskiego rynku ubezpieczeniowego dla kapitału zagranicznego**, które dopuszczało tworzenie zakładów ubezpieczeń z udziałem kapitału zagranicznego w formie spółki akcyjnej z siedzibą i centralą na terenie Polski,
– **zasada protekcjonizmu** – obowiązywał zakaz działalności na terenie Polski zagranicznych zakładów ubezpieczeń (pierwotnie do 1993 r., a następnie do 1999 r.),
– **ograniczenie form organizacyjno-prawnych** do spółki akcyjnej lub towarzystwa ubezpieczeń wzajemnych,
– koncesjonowanie działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej,
– **ograniczenie pozaubezpieczeniowej działalności gospodarczej** – obejmowało zakaz wykonywania działalności innej niż wskazana w licencji,
– **rozdział branż ubezpieczeniowych** na dwa działy: dział I – ubezpieczenia na życie oraz dział II – pozostałe ubezpieczenia osobowe oraz ubezpieczenia majątkowe,
– stworzenie podstaw funkcjonowania samorządu gospodarczego – Polskiej Izby Ubezpieczeń (PIU),
– **stworzenie podstaw funkcjonowania instytucji zabezpieczających** ubezpieczonych Ubezpieczeniowego Funduszu Gwarancyjnego, Rzecznika Ubezpieczonych.

W związku z tym od momentu wprowadzenia ustawy o działalności ubezpieczeniowej w 1990 r. rynek ubezpieczeniowy w Polsce wszedł na nową ścieżkę rozwoju. Najważniejszym rozwiązaniem formującym rynek ubezpieczeń było wprowadzenie formalnej jego **demonopolizacji i prywatyzacji**. Wszystkie podmioty podejmujące lub prowadzące działalność ubezpieczeniową były traktowane jednakowo, zaczęły funkcjonować w warunkach gospodarki wolnorynkowej, a ograniczenia, jakim podlegały, wynikały z przepisów ustawowych.

Dalsza transformacja polskiego rynku ubezpieczeniowego i reasekuracyjnego miała być realizowana zgodnie z zasadami zaczerpniętymi ze standardów UE, tak aby polski rynek ubezpieczeniowy został przystosowany do standardów obowiązujących w Unii Europejskiej. W czerwcu 1995 r. (Ustawa 1995) Sejm znowelizował ustawę ubezpieczeniową z 1990 r., wprowadzając wiele bardzo znamiennych zmian:

– **zwiększono wymagania formalnoprawne** wobec zakładów rozpoczynających działalność,
– **określono normy ostrożnościowe działania zakładu ubezpieczeń** (marginesu wypłacalności i minimalnego kapitału gwarancyjnego),
– **powołano Państwowy Urząd Nadzoru Ubezpieczeń** (PUNU) (obecnie Komisja Nadzoru Finansowego – KNF) jako instytucji licencjonującej, kontrolującej i dyscyplinującej,
– **zmieniono strukturę Ubezpieczeniowego Funduszu Gwarancyjnego**, który przejął także obowiązki Funduszu Ochrony Ubezpieczonych,
– powołano instytucję Rzecznika Ubezpieczonych,
– utworzono Polskie Biuro Ubezpieczeń Komunikacyjnych,
– zmieniono przepisy postępowania upadłościowego w przypadku zakładów ubezpieczeń,
– ustanowiono zasady zawodu aktuariusza.

Ustawa ta uwzględniała większość dyrektyw Unii Europejskiej i wprowadzała istotne reformy rynku, była przełomową ustawą, dzięki której polskie prawo ubezpieczeniowe zostało dostosowane do standardów prawa europejskiego. Tym samym od 1995 r. rynek ubezpieczeniowy zaczął funkcjonować na **zasadach gospodarki wolnorynkowej**, co skutkowało tym, że zmienił się układ sił na polskim rynku usług ubezpieczeniowych.

Kolejna nowelizacja ustawy z grudnia 1998 r. (Ustawa 1998) sprecyzowała i uporządkowała dotychczasowe przepisy dotyczące działalności zagranicznych zakładów ubezpieczeń i w pełni dostosowała je do wymogów unijnych. Zgodnie z dyrektywami Unii Europejskiej wydanie zezwolenia na działalność zagranicznych ubezpieczycieli w Polsce uzależniono od przestrzegania zasady wzajemności, przedstawienia zaświadczenia macierzystego organu nadzoru o wypłacalności oraz złożenia kaucji na zabezpieczenie przyszłych zobowiązań. Zgodnie z tą nowelizacją zagraniczny zakład ubezpieczeń mógł utworzyć w Polsce spółkę nawet ze 100-procentowym udziałem kapitału zagranicznego i spółka ta była podmiotem prawa polskiego. Osiągnięcie w pełni standardów europejskich w zakresie ubezpieczeń wymagało wprowadzenia dalszych uregulowań dotyczących między innymi:

– **podejmowania i prowadzenia działalności** w zakresie:
  • pełnej swobody świadczenia usług,
  • ujednolicenia licencji ubezpieczeniowej i nadzoru kraju pochodzenia,
  • uzupełnienia nadzoru nad grupami ubezpieczeniowymi,
  • zmiany przepisów dotyczących wydawania zezwolenia na prowadzenie działalności ubezpieczeniowej;

– **pośrednictwa ubezpieczeniowego** w zakresie:
  • wprowadzenia rejestracji pośredników ubezpieczeniowych i utworzenia ich centralnego rejestru,
  • określenia warunków zezwolenia na działalność w Polsce brokerów państw członkowskich;
– **ubezpieczeń obowiązkowych**, zwłaszcza ubezpieczenia posiadaczy pojazdów mechanicznych.

Fakt, iż prawo ubezpieczeń to dziedzina regulująca bardzo obszerną i różnorodną materię, spowodował, że na początku pierwszej dekady na wniosek rządu podjęto się ponownej kodyfikacji zasad działania na rynku ubezpieczeń. Ministerstwo Finansów rozpoczęło wówczas prace nad pełną reformą systemu ubezpieczeniowego. Celem zmian było rozwinięcie nowoczesnego rynku bazującego na rozwiązaniach europejskich. Za priorytet przyjęto założenie, iż rozwiązania systemowe muszą być kompatybilne z regulacją UE tak, aby nie stanowiły w przyszłości przeszkody w procesie integracji z rynkiem europejskim. Poza rozdziałem płaszczyzn funkcjonowania sektora ubezpieczeń ówczesna zmiana prawa wiązała się z potrzebą rozbudowy i uściślenia pojęć oraz regulacją obszarów nieobjętych dotychczasowymi przepisami. Obejmowało to m.in.: doprecyzowanie i uszczegółowienie zasad prowadzenia działalności ubezpieczeniowej w celu wzmocnienia ochrony ubezpieczonych oraz określenie szczegółowych zasad wykonywania zawodu aktuariusza.

Ostatecznie zasady działania rynku ubezpieczeń reguluje dziś **pakiet ustaw** odnoszący się do działalności ubezpieczeniowej i nadzoru (tabela 1.1).

Tabela 1.1. Regulacje prawne rynku ubezpieczeń w Polsce

Nazwa ustawy	Jednolity tekst
Ustawa z dnia 14 lutego 1991 r. Prawo o notariacie	Dz. U. z 2002 r. Nr 42, poz. 369 ze zm.
Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II)	Dz. U. UE L 335 z 17.12.2009 r.
Ustawa z dnia 11 września 2015 r. o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej	Dz. U. z 2015 r. poz. 1844 ze zm.
Rozporządzenie delegowane Komisji (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II)	Dz. U. UE L 12 z 17.1.2015 r.
Rozporządzenie delegowane Komisji (UE) 2016/467 z dnia 30 września 2015 r. zmieniające rozporządzenie (UE) 2015/35 w zakresie obliczania regulacyjnych wymogów kapitałowych w odniesieniu do kilku kategorii aktywów posiadanych przez zakłady ubezpieczeń i zakłady reasekuracji	Dz. U. UE L 85 z 1.4.2016 r.

Nazwa ustawy	Jednolity tekst
Ustawa z dnia 22 maja 2003 r. o ubezpieczeniach obowiązkowych, Ubezpieczeniowym Funduszu Gwarancyjnym i Polskim Biurze Ubezpieczycieli Komunikacyjnych	Dz. U. z 2016 r. poz. 2060 ze zm.
Ustawa z dnia 22 maja 2003 r. o pośrednictwie ubezpieczeniowym	Dz. U. z 2016 r. poz. 2077 ze zm.
Ustawa z dnia 15 kwietnia 2005 r. o nadzorze uzupełniającym nad instytucjami kredytowymi, zakładami ubezpieczeń, zakładami reasekuracji i firmami inwestycyjnymi wchodzącymi w skład konglomeratu finansowego	Dz. U. z 2016 r. poz. 1252
Ustawa z dnia 29 września 1994 r. o rachunkowości	Dz. U. z 2016 r. poz. 1047 ze zm.
Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej	Dz. U. z 2016 r. poz. 1829 ze zm.
Ustawa z dnia 14 czerwca 1960 r. Kodeks postępowania administracyjnego	Dz. U z 2016 r. poz. 23 ze zm.
Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych	Dz. U. z 2016 r. poz. 1578 ze zm.
Ustawa z dnia z dnia 16 listopada 2006 r. o opłacie skarbowej	Dz. U. z 2016 r. poz. 1827 ze zm.
Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny	Dz. U. z 2017 r. poz. 459
Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 12 kwietnia 2016 r. w sprawie szczególnych zasad rachunkowości zakładów ubezpieczeń i zakładów reasekuracji	Dz. U. z 2016 r. poz. 562
Rozporządzenie Ministra Rozwoju i Finansów w sprawie dokumentów załączanych do zawiadomień o zamiarze nabycia lub objęcia akcji lub praw z akcji krajowego zakładu ubezpieczeń lub krajowego zakładu reasekuracji lub o zamiarze stania się jednostką dominującą takiego zakładu	Dz. U. z 2016 r. poz. 1772

Źródło: opracowanie własne.

1.2. Zasady działania firm ubezpieczeniowych

Przez działalność ubezpieczeniową rozumie się wykonywanie czynności ubezpieczeniowych związanych z oferowaniem i udzielaniem ochrony na wypadek wystąpienia skutków zdarzeń losowych, którą mogą świadczyć zakłady ubezpieczeń (potocznie firmy ubezpieczeniowe), przy czym wyróżnia się **bezpośrednią i reasekuracyjną** działalność ubezpieczeniową. **Reasekuracja** jest umową, na mocy której jeden zakład ubezpieczeń, nazywany cedentem, odstępuje całość lub część ubezpieczonego ryzyka określonego rodzaju innemu zakładowi ubezpieczeń nazywanemu reasekuratorem. Rozróżnia się dwa rodzaje działalności reasekuracyjnej: reasekurację czynną polegającą na przejęciu przez zakład ubezpieczeń ryzyka od innego zakładu ubezpieczeniowego oraz reasekurację bierną polegającą na przeniesieniu (cesji) przez ubezpieczyciela prowadzącego działalność ubezpieczeniową w zakresie ubezpieczeń bezpośrednich, części ryzyk wynikających z zawartych umów ubezpieczeniowych. Jednak żaden zakład ubezpieczeń nie może wykonywać innej działalności poza działalnością ubezpieczeniową i bezpośrednio z nią związaną, ewentualnie może wykonywać inne czynności dozwolone prawem, takie jak:

– działalność akwizycyjna na rzecz OFE,
– pośredniczenie w zbywaniu i odkupywaniu jednostek uczestnictwa funduszy inwestycyjnych lub tytułów uczestnictwa funduszy zagranicznych,
– zabezpieczanie dokumentów związanych z zawieraniem i wykonywaniem umów ubezpieczenia.

Reasumując, **działalność ubezpieczeniowa** opiera się na czynnościach ubezpieczeniowych z zakresu: zawierania umów, oceny ryzyka, ustalania składek i prowizji, wysokości szkód, wypłacania ustalonych odszkodowań i świadczeń, lokowania środków zakładu ubezpieczeń czy reasekuracji. W sensie prawnym ustawa o ubezpieczeniach wyodrębnia dwie grupy czynności:

– czynności, które mogą wykonywać tylko zakłady ubezpieczeń (zawieranie umów ubezpieczeniowych, reasekuracji, gwarancji ubezpieczeniowych lub zlecanie ich zawierania pośrednikom; ustalanie stawek i prowizji z tytułu zawartych umów; ustanawianie koniecznych zabezpieczeń rzeczowych lub osobowych),
– czynności, które zakład może zlecać innym podmiotom, tzw. outsourcing (likwidacja szkód, wypłacanie odszkodowań lub innych świadczeń; ocena ryzyka w ubezpieczeniu majątkowym i umowach gwarancyjnych; prowadzenie postępowań regresowych i windykacyjnych w stosunku do wierzytelności wynikających z zawartych umów; lokowanie środków zakładu ubezpieczeniowego; czynności prewencyjne).

Podstawowym warunkiem wykonywania działalności ubezpieczeniowej (bezpośredniej i reasekuracyjnej) jest uzyskanie **zezwolenia**, czyli **koncesji**, tj. wypełnienie warunków kapitałowych, organizacyjnych i kadrowych określonych w przepisach prawa. Jest to zezwolenie organu nadzoru, którym w Polsce była Komisja Nadzoru Ubezpieczeń i Funduszy Emerytalnych (do 2008 r.), a obecnie jest Komisja Nadzoru Finansowego. Zezwolenie jest wydawane na prowadzenie jednej lub więcej grup ubezpieczeń danego działu. Aktualnie zezwolenie w dziale I posiada 26 zakładów ubezpieczeń, natomiast w dziale II wydano 34 zezwolenia.

Działalność ubezpieczeniowa z mocy prawa jest rozdzielona. **Zasada branżowości** oznacza, że zakład ubezpieczeń nie może prowadzić jednocześnie działalności w obu działach, tzn. w ramach ubezpieczeń na życie oraz ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych. Opierając się na dyrektywach Unii Europejskiej, w Polsce dokonano podziału rynku ubezpieczeniowego na dwa segmenty. Podstawowe regulacje prawne dotyczące funkcjonowania ubezpieczeń w Polsce zawarte są w ustawie o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Ustawa 2015), która wyodrębnia dwa działy ubezpieczeń:

Dział I – Ubezpieczenia na życie

Dział II – Pozostałe ubezpieczenia osobowe oraz ubezpieczenia majątkowe.

Podział firm ubezpieczeniowych na prowadzące ubezpieczenia na życie (Dział I) oraz prowadzące ubezpieczenia majątkowe i inne osobowe (Dział II) ma na celu uniemożliwienie przepływu środków finansowych między tymi działami, w konsekwencji ustalenie wyższych wymogów kapitałowych dla zakładów ubezpieczeń na życie, odmiennych zasad gospodarki finansowej oraz konieczność zatrudniania aktuariusza przez towarzystwa ubezpieczeń na życie. Różnice te wynikają z istoty ubezpieczeń prowadzonych przez oba działy, a kryterium tego podziału stanowi czas trwania ochrony ubezpieczeniowej oraz kalkulacja składek i rezerw matematycznych. W załączniku do ustawy (Ustawa 2015), ubezpieczenia na życie (Dział I) są klasyfikowane w następujący sposób:

Grupa 1. Ubezpieczenia na życie, dożycie i mieszane.

Grupa 2. Ubezpieczenia posagowe, zaopatrzenia dzieci.

Grupa 3. Ubezpieczenia na życie, jeżeli są związane z ubezpieczeniowym funduszem kapitałowym, a także ubezpieczenia na życie, w których świadczenie zakładu ubezpieczeń jest ustalane w oparciu o określone indeksy lub inne wartości bazowe.

Grupa 4. Ubezpieczenia rentowe.

Grupa 5. Ubezpieczenia wypadkowe i chorobowe, jeśli są uzupełnieniem ubezpieczeń wymienionych w grupach 1-4.

Ubezpieczenia te są ubezpieczeniami dobrowolnymi pełniącymi dwie funkcje: ochronną i oszczędnościową. Zapewniają bowiem ochronę ubezpieczeniową, jak również umożliwiają długoterminowe gromadzenie kapitału na przyszłość. Charakterystyczne dla tych ubezpieczeń jest to, że opierają się na idei określonej sumy ubezpieczenia oraz składki stałej wysokości płatnej przez cały okres ubezpieczenia lub jego część. Ubezpieczenia te gwarantują ubezpieczonemu zgodnie z zawartą umową ubezpieczenia wypłatę świadczenia oraz to, że koszt tego ubezpieczenia jest stały przez cały okres trwania umowy. Z tego względu, że prawdopodobieństwo śmierci rośnie wraz z wiekiem osoby ubezpieczanej, ustalenie wysokości składki według aktualnego prawdopodobieństwa śmierci, w okresie trwania umowy ubezpieczenia spowodowałaby konieczność opłacania bardzo wysokich składek przez osoby starsze. Aby uniknąć tego problemu, w ubezpieczeniach życiowych stosuje się zasadę jednolitej składki opłacanej przez ubezpieczonego przez cały okres ubezpieczenia. Oznacza to, że ubezpieczony w początkowym okresie nadpłaca składkę i właśnie z tej nadpłaconej składki firma ubezpieczeniowa tworzy rezerwę. Dzięki zastosowaniu idei stałej składki cena, jaką musi zapłacić ubezpieczający za ubezpieczenie, jest przystępna, jak również firma ubezpieczeniowa ma możliwość inwestowania zgromadzonej rezerwy finansowej z korzyścią dla ubezpieczonego.

Zakład ubezpieczeń obowiązuje także zasada *numerus clausus* oznaczająca, że działalność ubezpieczeniowa może być prowadzona tylko w ściśle określonej formie organizacyjno-prawnej: **spółki akcyjnej** (SA) lub **towarzystwa ubezpieczeń wzajemnych** (TUW). Jeżeli zakład ubezpieczeń działa jako spółka akcyjna, to nastawiony jest – jak każdy inny podmiot działający w tej formie – na zysk. Założycielami (akcjonariuszami) zakładu ubezpieczeń mogą być osoby fizyczne i prawne, polskie oraz zagraniczne. Występuje tu rozdzielenie akcjonariuszy (właścicieli) i ubezpieczonych. Ubezpieczony nie partycypuje ani w wypracowanych zyskach, ani nie pokrywa powstałych strat z tytułu ich działalności (obecnie spółki akcyjne sprzedają ubezpieczenia tzw. uczestniczące – *participating policies* – przy których ubezpieczeni mogą otrzymywać dywidendę z tytułu zysków, mimo że nie są akcjonariuszami spółki). Natomiast **towarzystwo ubezpieczeń wzajemnych** (TUW) – poza celem i charakterem prawnym – różni się tym, że jest podmiotem gospodarczym, którego celem nie jest osiąganie zysku, choć prowadzona działalność musi być rentowna. Założycielami TUW są sami ubezpieczeni (osoby prawne i fizyczne, polskie oraz zagraniczne), których członkostwo powstaje wraz z zawarciem umowy ubezpieczenia i gaśnie w momencie zakończenia okresu ubezpieczenia. TUW **nie jest spółką handlową**, lecz specyficznym podmiotem gospodarczym występującym tylko w ubezpieczeniach, określonym wyłącznie przez prawo ubezpieczeniowe.

Zakłady ubezpieczeń mogą wykorzystywać, zgodnie z możliwościami przewidzianymi w ustawodawstwie o pośrednictwie (Ustawa 2003), dwa podstawowe kanały dystrybucji: bezpośredni i pośredni. **Bezpośredni** kanał dystrybucji usług ubezpieczeniowych obejmuje etatowych pracowników zakładu. Natomiast **pośrednictwo** ubezpieczeniowe polegające na wykonywaniu czynności faktycznych lub prawnych związanych z zawarciem umów ubezpieczenia lub reasekuracji może być wykonywane przez **agentów ubezpieczeniowych** lub **brokerów ubezpieczeniowych**, czyli tzw. **klasyczny kanał dystrybucji**. Za klasyczny kanał dystrybucji uważa się także sytuację, w której zakład ubezpieczeń zawiera lub wykonuje umowy ubezpieczenia poprzez członka zarządu zakładu ubezpieczeń, prokurenta zakładu ubezpieczeń albo osobę będącą pracownikiem. Nie jest to jednak pośrednictwo ubezpieczeniowe. Mamy wówczas do czynienia ze sprzedażą:

– **agencyjną** za pośrednictwem agentów ubezpieczeniowych (osoby fizyczne, prawne oraz przedsiębiorcy bez osobowości prawnej, posiadający upoważnienie

zakładu ubezpieczeń do zawierania w jego imieniu i na jego rzecz umów ubezpieczenia lub pośredniczenia przy ich zawieraniu),
- **za pośrednictwem brokerów ubezpieczeniowych** (osoby fizyczne, prawne upoważnione do zawierania i wykonywania umów ubezpieczenia w imieniu ubezpieczającego lub do pośredniczenia przy zawieraniu umów ubezpieczenia na rzecz ubezpieczonego. W zakresie reasekuracji pośrednictwo jest wykonywane wyłącznie przez brokerów ubezpieczeniowych posiadających zezwolenie na wykonywanie działalności brokerskiej w zakresie reasekuracji – brokerów reasekuracyjnych).

Agentem ubezpieczeniowym jest przedsiębiorca upoważniony przez zakład ubezpieczeń do stałego zawierania umów ubezpieczenia w imieniu i na rzecz tego zakładu ubezpieczeń lub pośredniczenia przy zawieraniu umów. Przedsiębiorcą takim może być osoba fizyczna lub osoba prawna wpisana do rejestru agentów ubezpieczeniowych prowadzonego przez KNF. Agenci ubezpieczeniowi działają na podstawie podpisanych z zakładami ubezpieczeń umów agencyjnych. Agentów ubezpieczeniowych można podzielić na:
- agentów zatrudnionych w poszczególnych towarzystwach ubezpieczeniowych,
- licencjonowanych agentów działających na własny rachunek, ale oferujących ubezpieczenia tylko jednego zakładu ubezpieczeń,
- multiagentów działających na własny rachunek i niezwiązanych umową na wyłączność z żadną firmą ubezpieczeniową (do ostatniej grupy zalicza się również liczne firmy prowadzące sprzedaż ubezpieczeń jako działalność uboczną – firmy turystyczne, transportowe, handlowe itp.).

Nadzór nad działalnością agenta ubezpieczeniowego sprawuje zakład ubezpieczeń, na rzecz którego działa agent ubezpieczeniowy, jak również Komisja Nadzoru Finansowego (KNF). Organ nadzoru sprawuje nad agentami ubezpieczeniowymi nadzór pośredni poprzez nadzór nad zakładami ubezpieczeń.

Brokerem ubezpieczeniowym jest osoba fizyczna albo prawna posiadająca wydane przez organ nadzoru zezwolenie na wykonywanie działalności brokerskiej i wpisana do rejestru brokerów ubezpieczeniowych. Zezwolenie na wykonywanie działalności brokerskiej w zakresie ubezpieczeń albo w zakresie reasekuracji wydaje KNF. W odróżnieniu od agenta ubezpieczeniowego broker jest niezależnym pośrednikiem, który charakteryzuje się: samodzielnością w stosunku do ubezpieczającego, jednorazowością usług, co oznacza każdorazowość zleceń, działaniem w imieniu i interesie zleceniodawcy, a przede wszystkim **niezależnością od zakładu ubezpieczeń,** z którym nie jest związany żadną umową.

Na rynkach ubezpieczeń dominuje **dystrybucja wielokanałowa**, czyli taka, w której zakłady korzystają z co najmniej dwóch kanałów dystrybucji. Dywersyfikacja kanałów dystrybucji podyktowana jest segmentacją rynku, zróżnicowaniem oferty ubezpieczeniowej i potencjalnych odbiorców. Poszczególne kanały dystrybucji nie wykluczają się wzajemnie i nie stanowią dla siebie alternatywy. Ubezpieczyciele mogą korzystać z kanałów bezpośrednich, kanałów pośrednich, redystrybucyjnych oraz mogą określać udział poszczególnych uczestników wspomagających funkcjonowanie kanału.

1.3. Ryzyko działalności ubezpieczeniowej

Ryzyko nie należy do fundamentalnych kategorii ekonomicznych, a mimo to odgrywa znaczącą rolę zarówno w naukach ekonomicznych, jak i praktyce gospodarczej. Zdefiniowanie ryzyka jest zadaniem bardzo złożonym, a wynika to z faktu, iż jest ono określane na fundamencie różnych nauk i teorii, m.in. ekonomii, rachunkowości finansowej oraz w analizach ekonomicznych, naukach prawnych, psychologii, statystyce, ubezpieczeniach, teorii prawdopodobieństwa i innych, a sami ekonomiści nie są zgodni co do pierwszeństwa jego użycia i proponują odmienne stanowiska i interpretacje.

Po raz pierwszy pojęcie ryzyka pojawiło się w obszarze nauk aktuarialnych. Jako pierwszy wprowadził je niemiecki filozof i matematyk Johannes Nikolaus Tetens w pracy nad wyceną annuitetów w ubezpieczeniach na życie w 1786 r. (Tetens 1978). Zdefiniował on ryzyko kontraktu ubezpieczeniowego jako warunkową oczekiwaną stratę ubezpieczyciela, pod warunkiem że kontrakt wygeneruje stratę. Naturalną matematyczną miarą tak rozumianego ryzyka jest połowa średniego odchylenia bezwzględnego (ang. *mean deviation*) rozkładu wyników (zysk/strata) kontraktu ubezpieczeniowego, czyli:

$$\frac{1}{2N}\sum|x_i - \bar{x}|.$$

Definicja ta przyjęła się i dała początek szerszej teorii ryzyka w naukach aktuarialnych. Pod koniec XIX w. pod wpływem m.in. niemieckiego matematyka Felixa Hausdorffa (1897) zaproponowaną przez Tetensa miarę ryzyka zastąpiono dogodniejszym w zastosowaniach matematycznych odchyleniem standardowym. Niemal identyczną miarę zaproponował niezależnie pół wieku później Harry Markowitz, wprowadzając pojęcie ryzyka do nauk o finansach. Co ciekawe, aktuarialne pojęcie ryzyka rozwinęło się w niemal zupełnej separacji od innych nauk, w szczególności teorii prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej oraz ekonomii (Borch 1967). Był to wynik pobocznego traktowania nauk aktuarialnych i badań w zakresie tej dziedziny przez główne nurty badań naukowych oraz prezentacji wyników badań aktuarialnych jedynie w kontekście rozwiązywania problemów z dziedziny ubezpieczeń. W związku z tym w innych obszarach pojęcie ryzyka i inne jego rozumienie musiało zostać odkryte odrębnie.

Ryzyko działalności ubezpieczeniowej jest głównym przedmiotem działalności ubezpieczeniowej prowadzonej przez zakład ubezpieczeń. Co ważne, od początku ryzyko bywa utożsamiane z niepewnością, jednak jest to błędne podejście, bowiem ryzyko jest stanem obiektywnym świata zewnętrznego, natomiast niepewność jest subiektywnym stanem wiedzy o prawach rządzących obiektywnymi procesami. Podział ten występuje jako jeden z aspektów ogólnie rozumianego ryzyka i wiąże się ze zrozumieniem istoty jego podziału na ryzyko obiektywne i subiektywne, który jest niezwykle ważny z punktu widzenia praktyki ubezpieczeniowej. Podział i postrzeganie wymienionych ryzyk determinuje bowiem zachowania zarówno ubezpieczonych, jak i ubezpieczycieli. **Ryzyko subiektywne** w literaturze określane jest jako niepewność, oparte jest więc na osobistych uwarunkowaniach psychologicznych lub nastroju duchowym. Miarą tego ryzyka może być stopień niepewności (co do wystąpienia określonych strat), jednak jest to miara trudna do kwantyfikacji. Poziom ryzyka subiektywnego może być oceniany np. za pomocą testów psychologicznych, których wyniki są nieprecyzyjne i często niejednoznaczne i w związku z tym ryzyko subiektywne jest praktycznie niemierzalne. Należy jednak podkreślić, że mimo niemierzalności jego ocena jest niezwykle ważna z punktu widzenia zakładu ubezpieczeń, bowiem stanowi jeden z najistotniejszych czynników determinujących decyzję o ubezpieczeniu się. Natomiast w praktyce ubezpieczeniowej **ryzykiem obiektywnym** nie jest sam fakt wystąpienia szkody, ale możliwy do zaakceptowania margines błędu wynikający z różnicy pomiędzy rezultatami rzeczywistymi a zakładanymi. Ryzyko to rozumiane jest więc jako względne odchylenie straty rzeczywistej od oczekiwanej. Miarami ryzyka obiektywnego mogą być parametry statystyki opisowej mierzące poziom odchyleń wyników rzeczywistych od wartości oczekiwanej, np. odchylenie standardowe czy semiodchylenie, współczynnik zmienności. Pomiar tego ryzyka jest tym dokładniejszy, im badana grupa jest większa. Ma tu zastosowanie prawo wielkich liczb. W praktyce ubezpieczeniowej ryzyko obiektywne odnosi się do zagrożeń o charakterze masowym.

Każdy zakład ubezpieczeń (ubezpieczyciel) jest instytucją finansową funkcjonującą na określonym rynku i w pewnym otoczeniu, zatem ryzyko towarzyszące jego kompleksowej działalności można podzielić na:

- **ryzyko zewnętrzne** – zwane też systematycznym (rynkowe), jest niezależne od działania towarzystwa ubezpieczeniowego i nie podlega jego kontroli (związane z siłami przyrody, a także z warunkami ekonomicznymi danego rynku oraz rynku globalnego),

– **ryzyko wewnętrzne** – zwane też niesystematycznym, obejmuje obszar działania zakładu ubezpieczeń i podlega jego kontroli (najistotniejszym czynnikiem ryzyka firmy ubezpieczeniowej jest prawidłowa wycena składki ubezpieczeniowej, kalkulacja rezerw i zarządzanie posiadanymi aktywami).

W związku z tym ubezpieczyciel ma do czynienia z ryzykiem zarówno w ramach prowadzonej działalności ubezpieczeniowej, jak też narażony jest na ryzyko wynikające z jego funkcjonowania jako przedsiębiorstwa. Występują więc dwa typowe rodzaje ryzyka:

– dla działalności ubezpieczeniowej nazywane ryzykiem aktuarialnym,
– charakterystyczne dla innych instytucji finansowych rozumiane jako szeroko pojęte ryzyko finansowe.

Ryzyko aktuarialne związane jest z przyszłymi wynikami technicznymi zależnymi od takich czynników losowych, jak: częstość, intensywność szkód, koszty operacyjne, zmiany w składzie portfela, wypowiedzenia bądź konwersje umów ubezpieczenia. **Ryzyko finansowe** to ryzyko, na które narażona jest każda instytucja finansowa, np. bank, fundusz inwestycyjny. Do tej grupy zaliczają się: ryzyko zmian stopy procentowej, ryzyko kredytowe, ryzyko rynkowe, ryzyko walutowe.

Identyfikacja, ocena i monitorowanie rzeczywistego ryzyka, na które narażone są firmy ubezpieczeniowe, jest zadaniem niezwykle trudnym. Mimo to stosowany w zakładzie ubezpieczeń system zarządzania ryzykiem powinien być efektywny, oparty na ostrożnych założeniach oraz dostosowany do rozmiarów zakładu i skali jego działalności. Obecnie zgodnie z dyrektywą Unii Europejskiej, która kodyfikuje i harmonizuje unijne regulacje ubezpieczeniowe, znaną pod nazwą Solvency II (Rozporządzenie UE 2015) proponowana klasyfikacja ryzyka oparta jest na dokumencie International Actuarial Association, zgodnie z którym zdefiniowano następujące grupy ryzyka związanego z działalnością ubezpieczeniową (IAA 2004):

– **ryzyko ubezpieczeniowe** wiąże się z konstrukcją produktów i wyceną składek ubezpieczeniowych oraz z możliwością dokonania niewłaściwej oceny ryzyka i wyceny zobowiązań z tytułu zawartych umów ubezpieczenia;
– **ryzyko rynkowe** wynika ze zmiany notowań lub cen w wypadku działań inwestycyjnych, zmiany stóp procentowych, kursów walut, cen nieruchomości itp.;
– **ryzyko kredytowe** wiąże się z niemożnością (lub brakiem chęci) wypełnienia zobowiązań finansowych przez podmiot współpracujący (np. pożyczkobiorcę, brokera, agenta, ubezpieczającego, reasekuratora);
– **ryzyko operacyjne** jest konsekwencją niewłaściwego funkcjonowania procesów biznesowych w zakładzie ubezpieczeń, może ono wynikać z braków kontroli wewnętrznej, awarii technologicznych (np. IT), błędów ludzkich, nieuczciwości itd;

– **ryzyko płynności** wiąże się z niemożnością uzyskania środków finansowych na terminowe pokrycie zobowiązań zakładu ubezpieczeń bez ponoszenia dodatkowych strat.

Tak rozumiane ryzyko można podzielić na trzy podstawowe grupy: **ryzyko techniczne** (związane z działalnością techniczną, wynikające z rodzaju prowadzonych ubezpieczeń), **ryzyko inwestycyjne** (związane z działalnością lokacyjną zakładu ubezpieczeń) oraz pozostałe rodzaje ryzyka związane z działalnością gospodarczą. Dokładne poznanie rzeczywistego ryzyka, na które narażony jest ubezpieczyciel, pozwala na podjęcie odpowiednich działań mających na celu zredukowanie poszczególnych jego rodzajów do akceptowanego poziomu. Do działań takich należy m.in.:

– konstruowanie odpowiednich rozwiązań prawnych na poziomie regulatorów rynku ubezpieczeniowego,
– konstruowanie odpowiednich procedur nadzoru ubezpieczeniowego,
– konstruowanie systemu wczesnego ostrzegania na potrzeby zakładu ubezpieczeń oraz podmiotów zewnętrznych zainteresowanych rynkiem ubezpieczeniowym.

1.4. Ryzyko a ochrona ubezpieczeniowa

Ochrona ubezpieczeniowa, czyli utrzymanie warunków i gotowości zakładu ubezpieczeń do wypłaty świadczenia na skutek zajścia wypadku ubezpieczeniowego (Monkiewicz red. 2000), dotyczy zdefiniowanych w umowie zdarzeń losowych. Istotne, że z ustawowej definicji art. 3 ust. 1 pkt 57 (Ustawa 2015) wynika, iż **zdarzenie losowe** to niezależne od woli osoby ubezpieczonej zdarzenie niepewne i przyszłe, wskutek którego powstaje uszczerbek w dobrach majątkowych, osobistych lub zwiększenie potrzeb majątkowych po stronie osoby objętej ochroną lub osoby ubezpieczającej. Cechy zdarzeń losowych i warunki ich ubezpieczalności przedstawiono w tabeli 1.2.

Tabela 1.2. Cechy zdarzeń losowych i warunki ich ubezpieczalności

Cecha	Warunki ubezpieczalności
Statystyczna prawidłowość	Powtarzalność określonych zdarzeń w czasie i przestrzeni, pozwalająca na matematyczne obliczenie stopnia prawdopodobieństwa ich wystąpienia.
Masowość	Im bardziej liczna jest grupa zainteresowana ochroną przed określonym zdarzeniem losowym (grupa ryzyka), tym bardziej rzeczywisty rozkład realizacji zdarzeń losowych jest zbliżony do wartości oczekiwanej (tzw. prawo wielkich liczb). Brak odpowiedniej liczebności grupy ryzyka powoduje możliwość takich odchyleń rezultatów rzeczywistych od oczekiwanych, które mogą zagrażać stabilności zakładów ubezpieczeń i ich wypłacalności.

Cecha	Warunki ubezpieczalności
Mierzalność	Strata w dobrach osobistych lub majątkowych spowodowana zdarzeniem musi być definitywna i mierzalna.
Nadzwyczajność	Zdarzenie nie jest z góry określoną koniecznością dla podmiotów, których dotyka lub co najmniej nieznany jest czas, w jakim nieuniknione zdarzenie musi wystąpić. Wyróżnia się trzy grupy ryzyka: I: niepewność co do faktu (np. pożar), II: pewność co do faktu, niepewność dotyczy czasu realizacji (np. życie), III: pewność co do faktu i czasu, niepewność dotyczy skutków (np. skutki spodziewanego huraganu, powodzi).
Niezależność od woli poszkodowanego	Zdarzenie nie może być spowodowane umyślnym działaniem lub zaniechaniem. Umyślne przyczynienie się do szkody (hazard moralny) może być przesłanką wyłączenia odpowiedzialności ubezpieczyciela, skutkującego odmową wypłaty świadczenia lub odszkodowania.
Losowość	Brak możliwości wskazania konkretnych podmiotów dotkniętych zdarzeniem.

Źródło: opracowanie własne na podstawie Handschke, J., Monkiewicz, J. red., 2000, s. 18–19, 39.

Nieco inne definicje zdarzenia losowego można przeczytać w OWU, czyli ogólnych warunkach ubezpieczenia, zwłaszcza w zakresie różnicy między zdarzeniem losowym a nieszczęśliwym wypadkiem. Różnice w definicjach wybranych firm przedstawiono w tabeli 1.3.

Tabela 1.3. Cechy zdarzeń losowych i warunki ich ubezpieczalności

Cecha	Zdarzenie losowe	Nieszczęśliwy wypadek
PZU	Zdarzenie powodujące określone skutki, przypadkowe i niezależne od woli ludzkiej: deszcz nawalny, grad, eksplozja, huragan, ogień, powódź, lawina, upadek statku powietrznego, uderzenie pioruna, usuwanie lub zapadanie się ziemi, wydostanie się wody z urządzeń wodno-kanalizacyjnych, wydostanie się pyłu wulkanicznego.	Nagłe zdarzenie, które jest wywołane przyczyną zewnętrzną. W następstwie osoba ubezpieczona niezależnie od swojej woli doznaje uszkodzenia ciała, rozstroju zdrowia lub umiera.
GENERALI	Zdarzenie nieprzewidywalne i gwałtowne, które wystąpiło w okresie ubezpieczenia. Deszcz nawalny, sadza i dym, huragan, lawina, grad, osuwanie lub zapadanie się ziemi, powódź, napór śniegu, pożar, uderzenie pioruna, trzęsienie ziemi, uderzenie pojazdu mechanicznego, upadek pojazdu powietrznego, wybuch, zalanie.	Zdarzenie przypadkowe, nagłe i gwałtowne, spowodowane przyczyną zewnętrzną. Skutkiem jest doznanie przez osobę ubezpieczoną i wbrew jej woli obrażeń ciała. Ubezpieczyciel zastrzega, że nieszczęśliwy wypadek to nie jest utrata przytomności, zasłabnięcie, zaśnięcie.
LINK 4	Bezpośrednie uderzenie pioruna, deszcz nawalny, grad, huragan, lawina, pożar, powódź, trzęsienie ziemi, osuwanie lub zapadanie się ziemi.	Zdarzenie przypadkowe, nagłe i gwałtowne, spowodowane przyczyną zewnętrzną, w wyniku którego osoba ubezpieczona doznała uszkodzenia ciała, rozstroju zdrowia lub umiera.

Źródło: opracowanie własne na podstawie OWU wybranych Towarzystw Ubezpieczeniowych.

Wskutek nieszczęśliwego wypadku, który może być wywołany bliżej nieokreśloną przyczyną zewnętrzną, czyli zarówno działaniem człowieka, jak i sił przyrody, powstaje szkoda osobowa, natomiast zdarzenie losowe może, ale nie musi skutkować szkodą osobową. Z drugiej strony przyczyną nieszczęśliwego wypadku może być zachowanie innego człowieka, np. kierowcy, który po spożyciu alkoholu prowadzi samochód, natomiast zdarzenie losowe jest zależne przede wszystkim od sił natury.

Zakres ochrony ubezpieczeniowej różni się w zależności od rodzaju ubezpieczenia i towarzystwa. Zawierając umowę ubezpieczenia, ubezpieczyciel przejmuje na siebie ryzyko związane z przedmiotem ubezpieczenia i aby prawidłowo wycenić usługę ubezpieczeniową, konieczne jest określenie granic zobowiązań zakładu ubezpieczeń wobec ubezpieczonego. Ponieważ ryzyko jest skutkiem realizacji określonych zdarzeń, pod warunkiem, że zaistniały bez woli osoby, której dotyczą, niezbędne jest prawidłowe:

– zrozumienie natury ryzyka,
– rozpoznanie (określenie jego cech),
– kwantyfikacja.

Rozpoznanie ryzyka jest procesem, który powinien przebiegać systematycznie i w sposób ciągły. W działalności ubezpieczyciela identyfikacja ryzyka ma ogromne znaczenie. Po pierwsze – dotyczy identyfikacji nowego ryzyka, które może się pojawić (np. wprowadzenie nowych technologii czy usług finansowych) i do tej pory nie było ubezpieczane, a po drugie – istotny jest ciągły monitoring ryzyka dobrze znanego i już ubezpieczanego. Zidentyfikowanie ryzyka ubezpieczeniowego umożliwia przeprowadzenie poprawnego procesu kwantyfikacji, czyli pomiaru. Traktując ryzyko jako zmienną losową lub proces losowy, odpowiednią miarą ryzyka jest rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej. Miarami ryzyka stosowanymi w praktyce są parametry rozkładu prawdopodobieństwa, takie jak (Gerber 1986, Bowers i in. 1986):

– wartość oczekiwana,
– odchylenie standardowe,
– skośność,
– kurtoza.

Dopiero na podstawie dokonanego pomiaru ryzyka ubezpieczyciel może podejmować różne decyzje ubezpieczeniowe i dokonywać dalszych kalkulacji obejmujących między innymi cenę za ryzyko, czyli składkę ubezpieczeniową należną ubezpieczycielowi za ochronę ubezpieczeniową.

Ubezpieczenia na życie zabezpieczają naszą rodzinę, jak również są szansą zgromadzenia pewnego kapitału, tak więc ubezpieczenie to pełni dwie funkcje: zapewnia ochronę ubezpieczeniową oraz umożliwia długoterminową budowę kapitału. Charakterystyczne dla tego typu ubezpieczeń jest to, że opierają się na idei określonej sumy ubezpieczenia oraz składki stałej wysokości płatnej przez pewien lub cały okres ubezpieczenia (uśrednione ryzyko śmierci). Ubezpieczenie kapitałowe gwarantuje więc ubezpieczonemu wypłatę świadczenia zgodnie z zawartą umową ubezpieczenia oraz to, że koszt ubezpieczenia jest stały przez cały okres trwania umowy. Z tego względu, że prawdopodobieństwo śmierci rośnie wraz z wiekiem osoby ubezpieczanej, to ustalenie wysokości składki według aktualnego ryzyka w okresie trwania umowy ubezpieczenia spowodowałoby konieczność opłacania bardzo wysokich składek przez osoby starsze. Aby uniknąć tego problemu, w ubezpieczeniach kapitałowych na życie stosuje się zasadę jednolitej składki opłacanej przez ubezpieczonego przez cały okres ubezpieczenia, która wyznaczana jest według zasady równoważności. Oznacza to, że ubezpieczony w początkowym okresie nadpłaca składkę i właśnie z tej nadpłaconej składki firma ubezpieczeniowa tworzy rezerwę. Stanowi ona fundusze mające wyrównać powstający w przyszłości w wyniku opłacania przez ubezpieczonych składek niższych ich niedobór. Dzięki zastosowaniu idei stałej składki cena, jaką musi zapłacić ubezpieczający za ubezpieczenie, jest przystępna, jak również firma ubezpieczeniowa ma możliwość inwestowania zgromadzonej rezerwy finansowej z korzyścią dla ubezpieczonego. Ubezpieczenie na życie gwarantują ubezpieczonemu:

- wypłatę ustalonej w umowie sumy ubezpieczenia,
- składkę ubezpieczeniową jednakową przez cały okres ubezpieczenia (uśrednioną),
- brak podziału składki na część ochronną i inwestycyjną,
- brak wpływu na sposób, w jaki towarzystwo ubezpieczeniowe inwestuje pieniądze,
- warunki polityki lokacyjnej narzucone ustawą ubezpieczeniową,
- udział w zysku z inwestycji.

Indywidualne ubezpieczenia na życie można podzielić na dwie podstawowe kategorie: ubezpieczenie na własne lub cudze życie (np. dzieci). Zatem firmy ubezpieczeniowe w Polsce oferują klientom podstawowe umowy ubezpieczenia, w których ochroną ubezpieczeniową objęte jest życie własne lub cudze. Umowy te przewidują wypłatę świadczenia w razie śmierci ubezpieczonego lub dożycia przez niego określonego w umowie wieku, w zależności od przedmiotu ubezpieczenia (zakresu ochrony). W zależności od zakresu ochrony w ustawie (Ustawa 2015) wymienionych jest kilka form ubezpieczeń na życie sprzedawanych w Polsce:

- ubezpieczenia na życie,
- ubezpieczenia na dożycie,
- ubezpieczenia mieszane (na życie i dożycie),
- ubezpieczenia rentowe.

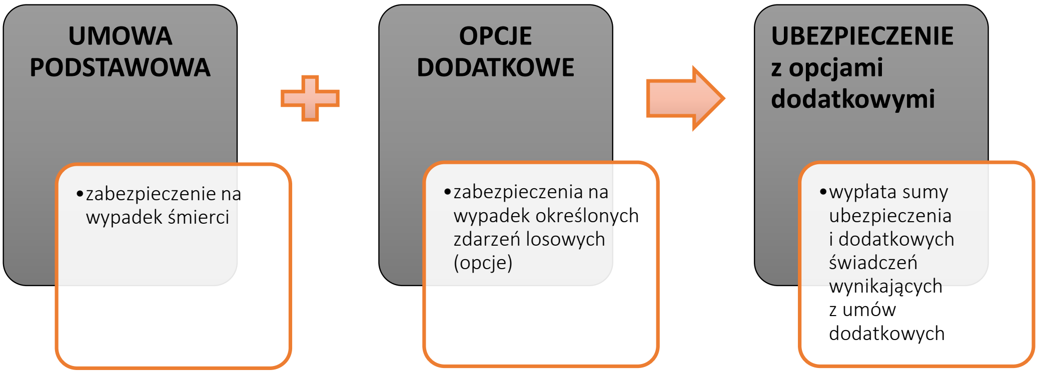
Ubezpieczenia na życie mają charakter ochronny, kończą się wypłatą świadczenia osobom uposażonym z tytułu śmierci ubezpieczonego. Celem takiego ubezpieczenia jest zabezpieczenie rodziny na wypadek dodatkowych kosztów oraz zmniejszenia dochodów w związku ze śmiercią jednego z jej członków. Ubezpieczenie na życie prowadzone jest według trzech podstawowych wariantów (Doan 1995, Gerber 1995, Stroiński 1996):

– ubezpieczenie czasowe (*term insurance*) ze stałą sumą ubezpieczenia,
– ubezpieczenie czasowe, z obniżającą się sumą ubezpieczenia, na przykład stanowiącą część niespłaconego kredytu (*credit term insurance*),
– ubezpieczenie na całe życie (*whole life insurance*).

Ubezpieczenia na dożycie w przeciwieństwie do opisanych wyżej mają charakter oszczędnościowy. Ubezpieczony po upływie określonego w umowie czasu otrzymuje kapitał wraz z uzyskanym przez towarzystwo ubezpieczeniowe zyskiem. Ubezpieczenie to bardzo rzadko występuje jako ubezpieczenie samodzielne, jest bowiem prowadzone przede wszystkim w połączeniu z ubezpieczeniem na życie. W połączeniu tym jako ubezpieczeniu mieszanym wykorzystane są wszystkie walory ubezpieczenia przy pełnym uwzględnieniu czynnika oszczędnościowego. Kolejnym produktem ubezpieczeń życiowych są ubezpieczenia rentowe. Ubezpieczenie to jest również pewnego rodzaju oszczędzaniem i stopniowym wykorzystywaniem zaoszczędzonych pieniędzy w latach późniejszych. Istotą tych ubezpieczeń jest to, że za opłaconą wcześniej składkę ubezpieczony otrzymuje rentę w wysokości i terminach określonych w polisie. Ze względu na formę płatności ubezpieczenia rentowe dzielimy na: rentę pewną i rentę życiową. Renta życiowa jest wypłacana nie dłużej niż do chwili śmierci rentobiorcy. Natomiast renta pewna jest to świadczenie wypłacane przez uzgodniony z ubezpieczycielem czas, niezależnie od tego czy rentobiorca żyje czy też nie.

1.5. Opcje dodatkowe w ubezpieczeniu na życie

Ubezpieczenie na życie i dożycie służą zabezpieczeniu finansowemu wskazanych przez ubezpieczonego osób na wypadek jego śmierci lub stanowi zabezpieczenie finansowe ubezpieczonego w przypadku dożycia określonego wieku. W takim ujęciu ochronę ubezpieczeniową gwarantuje umowa podstawowa zawarta przez ubezpieczonego. Jednak firmy ubezpieczeniowe oferują klientom złożone umowy ubezpieczenia na życie, tzn. umowy ubezpieczenia na życie i dożycie rozszerzane o dodatkowe ubezpieczenia nazywane **opcjami**, o które mogą być poszerzone ubezpieczenia na życie Działu I. Wykupując opcje dodatkowe, ubezpieczający ma możliwość zmiany zakresu ochrony ubezpieczeniowej gwarantujące mu wypłatę dodatkowych świadczeń. Zatem takie rozwiązanie daje możliwość rozszerzenia zakresu ubezpieczenia na wypadek określonych (wskazanych w umowach dodatkowych) zdarzeń losowych (Rys. 1.1).



Rysunek 1.1. Wysokość świadczenia wypłacanego z tytułu ubezpieczenia
Źródło: opracowanie własne.

Klasyczne ubezpieczenie na życie obejmuje więc śmierć lub dożycie ubezpieczonego do pewnego wieku określonego w podstawowej umowie ubezpieczeniowej, natomiast wykupując opcje, czyli dodatkowe ubezpieczenia, ubezpieczający ma możliwość rozszerzenia zakresu ochrony ubezpieczeniowej, a ubezpieczenie tego typu nazywa się **złożonym ubezpieczeniem na życie**. W przypadku tego typu ubezpieczeń na życie ustawodawca nałożył na ubezpieczyciela dodatkowe obowiązki dotyczące kształtowania treści takiej umowy ubezpieczenia (art. 20 ust. 1 i 4, Ustawa 2015). Mianowicie ubezpieczyciel w treści umowy ubezpieczenia musi obowiązkowo:
- zdefiniować poszczególne świadczenia przewidziane umową,
- określić wysokość składek odpowiadających poszczególnym świadczeniom podstawowym i dodatkowym,
- wyjaśnić zasady ustalania świadczeń należnych z tytułu umowy, w szczególności sposobu kalkulacji i przyznawania premii, rabatów i udziału w zyskach ubezpieczonego, określenia stopy technicznej, wskazania wartości wykupu oraz wysokości sumy ubezpieczenia w przypadku zmiany umowy ubezpieczenia na bezskładkową, o ile są one gwarantowane, określenia kosztów oraz innych obciążeń pobieranych przez ubezpieczyciela przy wypłacie świadczeń,
- opisać czynniki w metodach kalkulacji rezerw techniczno-ubezpieczeniowych, które mogą mieć wpływ na zmianę wysokości świadczenia ubezpieczyciela,
- wskazać przepisy regulujące opodatkowanie świadczeń ubezpieczyciela.

Obecnie na polskim rynku ubezpieczeniowym najczęściej jako umowy ubezpieczenia dodatkowego oferowane są opcje obejmujące następujące zdarzenia losowe:
- śmierć wskutek nieszczęśliwego wypadku (NW),

– pogorszenie stanu zdrowia (trwałe lub częściowe inwalidztwo spowodowane nieszczęśliwym wypadkiem lub poważne zachorowanie),
– przejęcie opłacania składek na wypadek niezdolności do pracy lub utraty pracy
– śmierć dzieci ubezpieczonego.

Niemniej jednak te same zdarzenia losowe determinują różnice w ofertach, które pojawiają się już na wstępie przy samej definicji zakresu ubezpieczenia poszczególnych opcji u różnych ubezpieczycieli. W związku z tym to samo zdarzenie losowe wiąże się z różnorakimi opcjami dodatkowymi rozszerzającymi zakres ochrony ubezpieczeniowej umowy podstawowej. Przykładowe z nich opisano w poniższej tabeli.

Tabela 1.4. Przykładowe opcje i zakres ich ochrony

Nazwa opcji	Zakres ochrony
Ochrona Życia	Gwarancja wyższej suma ubezpieczenia na życie.
Podwojona Ochrona	Dodatkowe wsparcie finansowe dla bliskich na wypadek śmierci w wskutek wypadku komunikacyjnego.
Ochrona bez Barier	Dodatkowe świadczenie w przypadku trwałego inwalidztwa (w przypadku niezdolności do pracy lub samodzielnego życia po chorobie lub wypadku).
Ochrona na Wszelki Wypadek	Wypłata świadczenia, jeśli po wypadku dojdzie do trwałego uszkodzenia ciała, powodującego co najmniej 1% inwalidztwo. Przy stwierdzeniu min. 50% inwalidztwa wskutek wypadku, dodatkowo gwarantowana jest wypłata renty i możliwość skorzystania z Pakietu Rehabilitacyjnego.
Uszkodzenie ciała po wypadku	Ochrona w przypadku poważnych, jak również i drobnych uszkodzeń ciała powstałych w wyniku wypadku, takich jak: skręcenia, zwichnięcia, złamania, oparzenia i odmrożenia od II stopnia oraz rany zaopatrzone chirurgicznie, szczegóły znajdują się w ogólnych warunkach ubezpieczenia.
Diagnoza Nowotworu	Dodatkowe świadczenie na walkę z nowotworem.
Wsparcie w Chorobie	Dodatkowe środki w przypadku diagnozy poważnej choroby lub gdy konieczna będzie operacja. Dodatkowo istnieje możliwość konsultacji u wybranych lekarzy specjalistów i całodobową infolinię.
Pobyt w Szpitalu	Wypłata za pobyt w szpitalu, a także świadczenia: lekowe, rehabilitacyjne oraz operacje.
Ochrona bez Zmian	Kontynuacja umowy ubezpieczenia w trudnych chwilach. Opcja oznacza, że ubezpieczyciel przejmie opłacanie składek za umowę na okres do 2 lat w przypadku poważnej choroby.
Bezpieczne Dziecko Premium	Kompleksowa ochrona dziecka obejmuje wsparcie finansowe po wypadku i chorobie dziecka. Jeśli w lipcu lub sierpniu zdarzy się wypadek, który spowoduje złamanie, oparzenie lub trwałe inwalidztwo dziecka, to świadczenie jest podwajane.

Źródło: opracowanie własne na podstawie ofert firm ubezpieczeniowych.

Powyższe opcje mogą być wykupione tylko w przypadku, gdy zostanie zawarta podstawowa umowa ubezpieczenia. Opcje dodatkowe można dokupić zarówno w momencie zawierania umowy ubezpieczenia, jak też w trakcie trwania umowy. Odpowiedzialność ubezpieczeniowa towarzystwa ubezpieczeniowego z tytułu ubezpieczenia dodatkowego wygasa:

– z chwilą śmierci ubezpieczonego,
– ze zmianą ubezpieczenia podstawowego na bezskładkowe,
– w roku ukończenia przez ubezpieczonego wskazanego w umowie roku życia,
– z chwilą podjęcia przez ubezpieczonego jakiejkolwiek pracy zarobkowej.

W zależności od rodzaju zawartej umowy ubezpieczenia wypłata świadczenia uzależniona jest od wybranego produktu i co się z tym wiąże, zakresu ubezpieczenia, tj. od osiągnięcia przez ubezpieczonego określonego wieku czy też zajścia zdarzenia objętego umową.

2. Model złożonego ubezpieczenia na życie

2.1. Analiza przypadków życiowych objętych ubezpieczeniem

Złożone ubezpieczenie na życie i dożycie to umowa zawarta pomiędzy ubezpieczonym a ubezpieczycielem, zgodnie z którą ubezpieczyciel zobowiązuje się do wypłaty świadczenia z tytułu:

– umowy podstawowej (obejmującej ryzyko podstawowe),
– umów dodatkowych (obejmujące rozszerzone ryzyko ubezpieczeniowe).

Umowa ubezpieczenia podstawowego na życie i dożycie dotyczą dwóch głównych przypadków życiowych: życia i śmierci. Natomiast w życiu każdego człowieka zachodzą różne zdarzenia losowe, nazywane także przypadkami życiowymi (Ostasiewicz 2000). Niektóre z tych przypadków związane są z ryzykiem finansowym, stąd mogą być przedmiotem ubezpieczenia, i to właśnie umowy dodatkowe w ramach ubezpieczenia złożonego dotyczą przypadków życiowych wyodrębnionych w ramach pierwszego z nich. W większości towarzystw ubezpieczeniowych oferowane są ubezpieczenia od inwalidztwa lub śmierci wskutek nieszczęśliwego wypadku, czasowej niezdolności do pracy spowodowanej utratą zdrowia, wystąpienia pewnego typu zachorowań, śmierci dziecka itp. Wszystkie przypadki życiowe, których dotyczy umowa ubezpieczenia, wyspecyfikowane są w warunkach ogólnych ubezpieczenia. Każdemu z tych przypadków życiowych odpowiada odpowiednia dodatkowa opcja polisy ubezpieczeniowej, inaczej jej status.

Z punktu widzenia ubezpieczonego zajście zdarzenia losowego objętego umową ubezpieczenia oznacza przypadek życiowy, natomiast z punktu widzenia firmy jest to zarówno przypadek życiowy, jak i odpowiednia aktywna opcja polisy nazywana jej stanem. Tak więc model opisujący dynamikę zmian sytuacji życiowych osoby ubezpieczonej jest jednocześnie modelem opisującym dynamiczny charakter aktywizacji możliwych opcji polisy. Najprostszy probabilistyczny model ubezpieczeń z opcją dodatkową rozpatrywany w 1991 r. w *Continuous Mortality Investigation Reports*, dotyczący ubezpieczeń zdrowotnych PHI (*permanent health insurance*), obejmuje trzy stany odpowiadające następującym przypadkom życiowym (IA 1991):

H – ubezpieczony jest zdrowy,

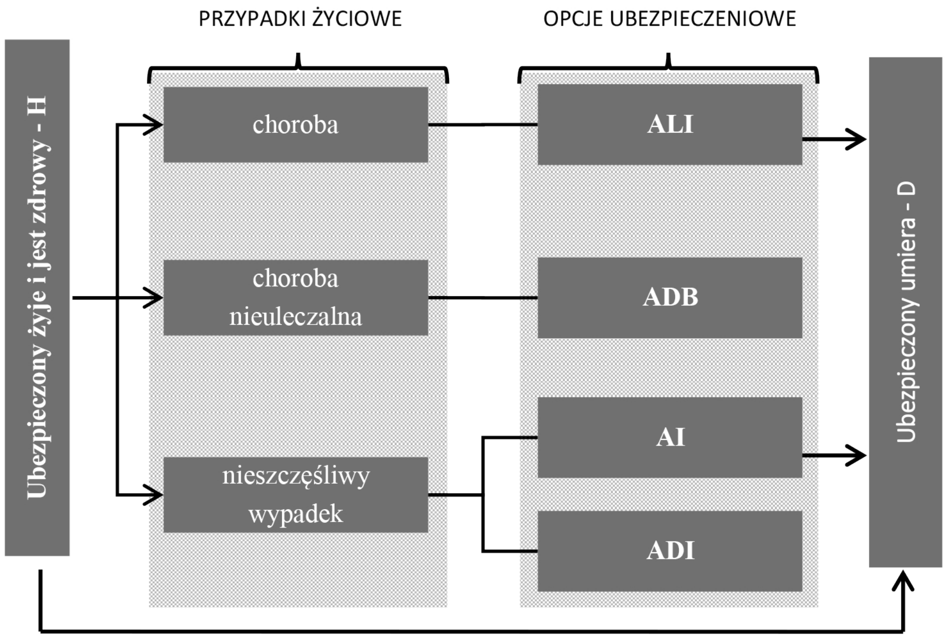
S – ubezpieczony jest chory,

D – ubezpieczony umarł.

Naturalnym rozwinięciem modeli z jednym stanem są modele wielostanowe. W modelach tych stan odpowiadający chorobie ubezpieczonego jest zastąpiony przez m ($m \geq 1$) różnych stanów odpowiadających wielorakim przypadkom życiowym objętych ubezpieczeniem dodatkowym. Każdy z tych stanów reprezentuje możliwe grupy jednostek chorobowych, wyodrębnionych zgodnie z Międzynarodową klasyfikacją chorób i problemów zdrowotnych (GUS 2018) lub inne zdarzenie losowe, które może być objęte ubezpieczeniem i stanowić o jego opcjach dodatkowych. Najczęściej podstawowe umowy ubezpieczenia na życie uzupełniane są o następujące opcje dodatkowe:

– ADI (*accidental death insurance*) to ubezpieczenie na wypadek śmierci na skutek nieszczęśliwego wypadku. Realizacja opcji kończy ubezpieczenie.
– AI (*accident insurance*) to opcja ubezpieczenia wypadkowego na skutek nieszczęśliwego wypadku nazywanego ubezpieczeniem od następstw nieszczęśliwych wypadków.
– ALI (*acceleration life insurance*) to przyśpieszone ubezpieczenie na życie, w którym część odprawy pośmiertnej, najczęściej około 25%, jest wypłacana ubezpieczonemu na pokrycie kosztów leczenia.
– ADB (*accelerated death benefits*) to opcja przyspieszonego świadczenia z tytułu śmierci na pokrycie kosztów leczenia dla osób ze zdiagnozowaną chorobą nieuleczalną w stanie terminalnym (warunkiem skorzystania z opcji jest oczekiwany przyszły czas życia nie dłuższy niż 12 miesięcy). Realizacja tej opcji kończy ubezpieczenie.

Dwie pierwsze opcje ubezpieczeniowe to opcje z grupy wypadkowych, natomiast dwie kolejne to przykład opcji chorobowych, które w pewnym stopniu „przyspieszają" wypłatę świadczeń. Schemat możliwych przypadków życiowych objętych ubezpieczeniem i związanych z nimi opcji oraz przejść między nimi, czyli model probabilistyczny polisy z opcjami dodatkowymi ALI, ADB, AI i ADI, przedstawiono na poniższym rysunku.



Rysunek 2.1. Schemat stanów i przejść między nimi w ubezpieczeniu z opcjami dodatkowymi typu ALI, ADB, AI i ADI
Źródło: opracowanie własne.

Jest to model ubezpieczenia złożonego z opcjami dodatkowymi stanowiący uogólnienie modelu szkodowości wielorakiej stosowanego w klasycznych ubezpieczeniach życiowych (Scott 1999, Szkutnik 2002, Błaszczyszyn, Rolski 2004). W przedstawionym modelu probabilistycznym występuje stan początkowy i końcowy, które oznaczono odpowiednio H i D, oraz m stanów określających aktywną opcję wynikającą z zajścia określonego przypadku życiowego objętego ubezpieczeniem. Zmiana sytuacji życiowej ubezpieczonego powoduje zmianę stanu (statusu) polisy ubezpieczeniowej, innymi słowy każdemu przypadkowi życiowemu osoby ubezpieczonej odpowiada określony stan ze zbioru $S = \{h, 1, 2, \ldots, m, D\}$ odpowiadający określonej opcji polisy ubezpieczeniowej. Do opisu zmian stanów od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia wykorzystywana jest funkcja $X(t)$, gdzie t oznacza czas, jaki upłynął od zawarcia umowy ubezpieczenia. Należy zauważyć, że każdy przypadek życiowy jest zdarzeniem losowym, więc dla każdej chwili t, $X(t)$ jest zmienną losową, a $\{X(t)\}_{t\in T}$ jest procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S.

Tak więc przy modelowaniu ubezpieczeń złożonych należy zrezygnować z modeli deterministycznych na rzecz probabilistycznych opartych na wykorzystaniu procesów stochastycznych (Booth i in. 1999, Martin-Lof 1996). Wśród modeli probabilistycznych stosowanych w ubezpieczeniach na życie i dożycie szczególne miejsce zajmują modele

Markowa, czyli modele zbudowane przy wykorzystaniu procesów Markowa. Rozważania dotyczące modeli Markowa i semi-Markowa i możliwości ich zastosowania m.in. w obszarze ubezpieczeń znaleźć można w wielu pracach. Najważniejsze z nich to: Hoem (1969), Andersen (1991), Haberman i Pitacco (1998) i Hougaard (1999). Późniejsze badania nad modelowaniem zachowań losowych ubezpieczających obejmują prace: Andersena i Keidinga (2002), Møllera i Steffensena (2002), Wolthuisa (2003), Janssena i Manki (2007), Christiansena (2010, 2012), Tomasa i Plancheta (2013).

Przy wyborze modelu stanowiącego formalną konstrukcję odwzorowującą najważniejsze cechy złożonego ubezpieczenia na życie z opcjami dodatkowymi należy uwzględnić zależność prawdopodobieństw przejścia (czyli zmiany stanu polisy) od:

- wieku osoby ubezpieczanej,
- aktywnej w danym momencie opcji polisy (innymi słowy od aktualnego stanu procesu $\{X(t)\}_{t\in T}$),
- czasu trwania tej aktywności,
- całkowitego czasu aktywności opcji polisy.

Uwzględniając dwa pierwsze czynniki, funkcję intensywności przejścia (zachorowalności, umieralności czy rekonwalescencji) traktuje się jako funkcję dwóch argumentów: czasu t oraz wieku x osoby ubezpieczonej. W takim przypadku do budowy modelu opisującego ubezpieczenie z opcjami dodatkowymi wykorzystywane są procesy Markowa. Do głównych walorów tego typu modeli należy ich względna prostota, a przede wszystkim to, że właśnie procesy Markowa pozwalają opisać mechanizm losowy rządzący przypadkami życiowymi zachodzącymi w życiu ubezpieczonych. Natomiast uwzględnienie czasu aktywności opcji polisy w modelowaniu wiąże się z rozważaniem bardziej realistycznych i zarazem skomplikowanych tzw. modeli semi-Markowa (Waters 1989, Janssen, Manca 2002, Haberman, Pitacco 1999), które uwzględniają zarówno aktywną opcję polisy, jak i czas trwania tej aktywności. Jako przykład późniejszych prac związanych z uzależnieniem od czasu trwania, czyli obejmujące zastosowanie modeli półmarkowskich, znaleźć można np. w: Czado, Rudolph (2002), Koller (2012), D'Amico i in. (2013), Buchardt i in. (2013, 2014), Biessy (2015). Model semi-Markowa jest również modelem zbudowanym przy wykorzystaniu procesów Markowa, w tym jednak przypadku procesem Markowa jest para ciągłych w czasie procesów stochastycznych $\{X(t), R(t)\}_{t\in T}$. Dla ustalonego momentu t trwania umowy ubezpieczenia zmienna losowa $X(t)$ oznacza stan procesu w momencie t (innymi słowy aktywną opcję polisy, gdy ubezpieczony jest w wieku $(x + t)$, natomiast proces $R(t)$ określa czas aktywizacji tej opcji.

2.2. Model semi-Markowa aktywizacji opcji

Jak wskazano w poprzednim podrozdziale, procesami stochastycznymi, które umożliwiają prawidłowe opisanie procesu aktywizacji opcji w złożonym ubezpieczeniu, są procesy Markowa. Procesem Markowa jest w tym przypadku rodzina zmiennych losowych $\{X(t)\}_{t\in T}$ określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, $\mathcal{F}_t$, *P*) (Iosifescu 1988, Podgórska 1994). Zmienna losowa *X*(*t*) oznacza stan procesu w momencie *t* trwania umowy ubezpieczenia, a zapis *X*(*t*) = *i* oznacza, że w momencie *t* proces *X*(*t*) jest w stanie *i* (aktywna jest *i*-ta opcja umowy ubezpieczenia złożonego). W dowolnej chwili proces może znajdować się tylko w jednym ze stanów, a stan oznaczony *H* to stan początkowy, tzn. *X*(0) = *H*. Natomiast poszczególnym przypadkom życiowym zachodzącym w życiu ubezpieczonego odpowiada konkretna realizacja procesu $\{X(t)\}_{t\in T}$ opisująca proces aktywizacji opcji polisy w okresie jej trwania.

Kolejnym krokiem budowy modelu jest określenie prawdopodobieństw zajścia zdarzeń losowych objętych ubezpieczeniem. Polega to na określeniu prawdopodobieństw przejść pomiędzy poszczególnymi stanami z przestrzeni *S* w dowolnych momentach trwania ubezpieczenia, czyli określenie rozkładu prawdopodobieństwa procesu Markowa. To oznacza konieczność wyznaczenia warunkowego prawdopodobieństwa przejścia oznaczającego aktywizację *k*-tej opcji ubezpieczenia w chwili *t*, pod warunkiem możliwych zdarzeń losowych, które zaszły w przeszłości, czyli do chwili *t*. Prawdopodobieństwo to jest wyrażone wzorem:

$$P(X(u) = k|\mathcal{F}_t, \tag{2.1}$$

gdzie $\mathcal{F}_t$ to zbiór wszystkich możliwych zdarzeń losowych, które zaszły do chwili *t* nazywany historią procesu $\{X(t)\}_{t\in T}$.

Z własności procesów Markowa wynika, że prawdopodobieństwo warunkowe nie zależy od całej historii procesu, a jedynie od aktualnego stanu, czyli aktywnej w chwili *t* opcji polisy. Wobec powyższego prawdopodobieństwo przejścia ze stanu *j* w momencie *t* do stanu *k* w momencie *u* dla $0 \leq u < t$ zdefiniowane jest następująco:

$$P_{jk}(t,u) = P(X(u) = k|X(t) = j\,). \tag{2.2}$$

Dla *u* = *t* mamy:

$$P_{jk}(t,t) = \begin{cases} 0\ dla\ j \neq k \\ 1\ dla\ j = k \end{cases}.$$

Określenie prawdopodobieństwa przejść dla *t* = *u* wynika z faktu, że proces $\{X(t)\}_{t\in T}$ w momencie *t* może znajdować się tylko w jednym ze stanów. Natomiast prawdopodobieństwo pozostania w stanie *j* od momentu *t* do momentu *u* zdefiniowane jest następująco:

$$P_{jj}(t,u) = P(X(\tau) = j\ dla\ t \leq \tau < u|X(t) = j\,). \tag{2.3}$$

W klasycznych ubezpieczeniach na życie do opisu prawdopodobieństw stosowana jest tradycyjna notacja aktuarialna, w której w sposób jawny uwzględniony jest wiek wstępu ubezpieczonego, oznaczamy jako x. Wówczas rozważane są następujące prawdopodobieństwa:

${}_tp_x$ – prawdopodobieństwo przeżycia t lat przez x-latka,

${}_tq_x$ – prawdopodobieństwo śmierci x-latka do chwili t.

Zatem zgodnie z notacją aktuarialną prawdopodobieństwa warunkowe dla modelu Markowa oznaczone są następująco:

$$ {}_tp_x^{jk} = P(X(x+t) = k | X(x) = j) $$

oraz

$$ {}_tp_x^{\underline{jj}} = P(X(x+\tau) = j \; dla \; 0 \le \tau < t | X(x) = j)\cdot $$

Uwzględniając możliwe stany w modelu polis wieloopcyjnych, otrzymuje się następujące prawdopodobieństwa warunkowe:

${}_tp_x^{HH}$ – prawdopodobieństwo, że osoba zdrowa w wieku x będzie również zdrowa w wieku $x+t$ czyli w momencie t trwania umowy,

${}_tp_x^{Hj}$ – prawdopodobieństwo, że osoba zdrowa w wieku x będzie chora w wieku $x+t$,

${}_tp_x^{HD}$ – prawdopodobieństwo śmierci w wieku $x+t$ osoby zdrowej w wieku x

${}_tp_x^{jH}$ – prawdopodobieństwo rekonwalescencji w wieku $x+t$ osoby chorej w wieku x,

${}_tp_x^{jD}$ – prawdopodobieństwo śmierci w wieku $x+t$ osoby chorej w wieku x,

${}_tp_x^{jk}$ – prawdopodobieństwo, że osoba chora w wieku będzie również chora w wieku $x+t$, ale przyczyną jest inna choroba lub uraz.

Wiadomo, że prawdopodobieństwa przejścia procesu Markowa spełniają równania Chapmana-Kołmogorowa (Iosifescu 1988, Podgórska 1994). Przy zastosowaniu powyższej notacji aktuarialnej dla ubezpieczeń z opcjami dodatkowymi, równania te przyjmują następującą postać:

$$ {}_{u-t}p_{x+t}^{jk} = \sum_{i \in S} {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ji} \cdot {}_{u-\tau}p_{x+\tau}^{ik}, $$

$$ {}_{u-t}p_{x+t}^{\underline{jj}} = {}_{\tau-t}p_{x+t}^{\underline{ji}} \cdot {}_{u-\tau}p_{x+\tau}^{\underline{ij}}. $$

Ważnym narzędziem w analizie przeżycia jest funkcja intensywności umieralności $\mu(t)$, która wyraża prawdopodobieństwo zgonu dla krótkich przyrostów czasu, innymi słowy określająca prawdopodobieństwo śmierci w dowolnym momencie t (Matłoka 1997). Ponieważ aktywizacja opcji dodatkowych ubezpieczenia może zachodzić w dowolnym momencie jego trwania, to zamiast prawdopodobieństw przejścia stosowane są intensywności przejścia odpowiednio ze stanu *j* do stanu *k*, oznaczone $\mu_{jk}(t)$ i zdefiniowane następująco (Błaszczyszyn, Rolski 2004, Ostasiewicz 2003):

$$\mu_{jk}(t) = \lim_{u \to t} \frac{P_{jk}(t,u)}{u-t} = \lim_{dt \to 0^+} \frac{P_{jk}(t,t+dt)}{dt}.$$

W przypadku ubezpieczeń z opcjami wyróżnia się następujące intensywności:

$\mu_{Hj}(t)$ – intensywność zachorowalności,

$\mu_{HD}(t)$ – intensywność umieralności osób zdrowych,

$\mu_{jH}(t)$ – intensywność rekonwalescencji,

$\mu_{jD}(t)$ – umieralność z powodu określonych przyczyn.

Ponieważ wiek wstępu ma wpływ na indywidualną zachorowalność, rekonwalescencję czy umieralność, aktuarialna notacja intensywności jest następująca:

$$\mu_{HD}(t) = \mu(x+t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{dp_{x+t}^{HD}}{dt},$$

$$\mu_{Hj}(t) = \sigma_j(x+t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{dp_{x+t}^{Hj}}{dt},$$

$$\mu_{jH}(t) = \rho_j(x+t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{dp_{x+t}^{jH}}{dt},$$

$$\mu_{jD}(t) = \nu_j(x+t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{dp_{x+t}^{jD}}{dt},$$

$$\mu_{jk}(t) = \eta_{jk}(x+t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{dp_{x+t}^{jk}}{dt}.$$

Jeśli wszystkie granice występujące w powyższych definicjach istnieją, wówczas intensywności przejścia są funkcjami czasu. Powyższe wzory określają związki między intensywnościami przejścia a prawdopodobieństwami przejścia w dowolnym przedziale czasu $(t, t+dt)$, które można zapisać w następującej równoważnej postaci:

$$_{dt}p_{x+t}^{HD} = \mu(x+t)dt + o(dt),$$

$$_{dt}p_{x+t}^{Hj} = \sigma_j(x+t)dt + o(dt),$$

$$_{dt}p_{x+t}^{jH} = \rho_j(x+t)dt + o(dt),$$

$$_{dt}p_{x+t}^{jD} = \nu_j(x+t)dt + o(dt),$$

$$_{dt}p_{x+t}^{jk} = \eta_{jk}(x+t)dt + o(dt),$$

gdzie $\lim_{dt \to 0^+} \frac{o(dt)}{dt} = 0.$

Tak określone intensywności i prawdopodobieństwa przejścia spełniają równania różniczkowe Kołmogorowa, które zapisane zgodnie z obowiązującą notacją aktuarialną dla modelu polis z opcjami dodatkowymi przyjmują następującą postać:

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{HH} = \sum_{i\neq H} {}_tp_x^{Hi}\rho_i(x+t) - {}_tp_x^{HH}\mu(x+t) - {}_tp_x^{HH}\sum_{i\neq H}\sigma_i(x+t),$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{Hj} &= \sum_{i\neq j} {}_tp_x^{Hi}\eta_{ij}(x+t) + {}_tp_x^{HH}\sigma_j(x+t)\\ &\quad - {}_tp_x^{Hj}\left[\rho_j(x+t) + \nu_j(x+t) + \sum_{i\neq j}\eta_{ji}(x+t)\right],\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{HD} = \sum_{k\neq j}^{m} {}_tp_x^{Hk}\,\nu_k(x+t) + {}_tp_x^{HH}\mu(x+t),$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{jk} &=\\ &{}_tp_x^{jH}\sigma_k(x+t) - {}_tp_x^{jk}\sum_{i\neq k}^{m}\big(\eta_{ki}(x+t) + \rho_k(x+t) + \nu_k(x+t)\big),\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{jH} = \sum_{k\neq j}^{m} {}_tp_x^{jk}\,\rho_k(x+t) - {}_tp_x^{jH}\sum_{k\neq j}^{m}\big(\sigma_k(x+t) + \mu(x+t)\big),$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{jD} = \sum_{k\neq j}^{m} {}_tp_x^{jk}\,\nu_k(x+t) + {}_tp_x^{jH}\mu(x+t).$$

Rozwiązań powyższych równań nie można podać w ogólnej jawnej postaci, dlatego przedstawiono sposób ich rozwiązywania. Mianowicie dwa pierwsze równania tworzą układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu ogólnej postaci (Billingsley 1987):

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt} = f(t, y, z_i)\\[2mm] \dfrac{dz_i}{dt} = f(t, y, z_i),\end{cases}$$

gdzie $y(t) = {}_tp_x^{HH}$ oraz $z_i(t) = {}_tp_x^{H}$.

Taki układ równań rozwiązuje się przez podstawienie i sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego. Kolejne równanie po podstawieniu prawdopodobieństw ${}_tp_x^{HH}$, ${}_tp_x^{Hi}$ sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego pierwszego rzędu typu:

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \text{ gdzie } y(t) = \ {}_{t}p_{x}^{HD} .$$

W kolejnym kroku rozwiązuje się układ kolejnych dwóch równań Kołmogorowa, w ten sposób, że z pierwszego z nich otrzymuje się:

$$ {}_{t}p_{x}^{jH} = \frac{1}{\sigma_k(x+t)}\left(\frac{d}{dt}\ {}_{t}p_{x}^{jk} + \ {}_{t}p_{x}^{jk}\sum_{i\neq k}^{m}\left(\eta_{ki}(x+t) + \rho_k(x+t) + \nu_k(x+t)\right)\right).$$

Dokonując podstawienia, można rozwiązać równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu postaci:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h(t)\frac{dy}{dt} + f(t)y = 0 \text{ gdzie } y(t) = \ {}_{t}p_{x}^{jk} .$$

Następnie podstawiając uzyskane prawdopodobieństwa do ostatniego z równań, otrzymuje się niejednorodne różniczkowe równania liniowe pierwszego rzędu postaci:

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \text{ gdzie } y(t) = \ {}_{t}p_{x}^{jD} .$$

W omówiony wyżej sposób na podstawie równań różniczkowych Kołmogorowa wyznacza się rozkład prawdopodobieństwa procesu Markowa $\{X(t)\}_{t\in T}$. Rozkład ten wykorzystywany jest do budowy modelu wielostanowego Markowa, który stanowi podstawę dalszej analizy przepływów pieniężnych ubezpieczeń wieloopcyjnych.

Natomiast prawdopodobieństwa pozostawania w określonym stanie spełniają następujące równania:

$$\frac{d}{dt}\ {}_{t}p_{x}^{\overline{HH}} = \ {}_{t}p_{x}^{\overline{HH}}\sum_{k\neq j}^{m}\left(\sigma_k(x+t) + \mu(x+t)\right),$$

$$\frac{d}{dt}\ {}_{t}p_{x}^{\overline{jj}} = \ {}_{t}p_{x}^{\overline{jj}}\sum_{k\neq j}^{m}\left(\eta_{jk}(x+t) + \rho_j(x+t) + \nu_j(x+t)\right).$$

Równania te to liniowe jednorodne równania różniczkowe, których rozwiązania dane są wprost wzorami:

$$ {}_{t}p_{x}^{\overline{HH}} = exp\left(-\int_0^t \sum_{k\neq j}^{m}\left(\sigma_k(x+\tau) + \mu(x+\tau)\right)d\tau\right),$$

$$ {}_{t}p_{x}^{\overline{jj}} = exp\left(-\int_0^t \sum_{k\neq j}^{m}\left(\eta_{jk}(x+t) + \rho_j(x+t) + \nu_j(x+t)\right)d\tau\right).$$

2.3. Nieparametryczne modele trwania życia

Punktem wyjścia do rozważań na temat złożonych ubezpieczeń na życie z opcjami dodatkowymi jest analiza trwania ludzkiego życia i momentu jego końca oraz różnych przypadków życiowych jako zjawiska o charakterze losowym. Zmienna określająca czas trwania jako zmienna losowa ma pewien rozkład. Jeżeli nieznane są postacie analityczne funkcji charakteryzujących rozkład życia ludzkiego, model przeżycia nazywany jest nieparametrycznym, w przeciwnym przypadku mamy do czynienia z modelem parametrycznym. Jednymi z najstarszych nieparametrycznych modeli czasu trwania życia, w których szacuje się wartości funkcji dla dyskretnej zmiennej losowej, są tablice demograficzne, zwane tablicami trwania życia (TTŻ). Tablice te mogą być konstruowane dla rzeczywistych generacji, wówczas nazywa się je tablicami wzdłużnymi (kohortowymi) i przedstawiają, jak populacja jednocześnie urodzonych zmniejsza swoją liczebność w skutek zgonów w kolejnych latach życia. Jednak tablice wzdłużne dla całej populacji są rzadko konstruowane. Obserwacja zgonów ludności musiałaby trwać co najmniej 100 lat, tak aby osoba zajmująca się badaniem zgonów miała odpowiednie dane. Zatem aby przedstawić proces umieralności populacji żyjącej w warunkach panujących w rozważanym okresie, konstruuje się tzw. tablice przekrojowe, które przedstawiają hipotetyczny proces wymierania ludzi z różnych generacji na podstawie obserwacji ich umieralności w badanym okresie. W związku z tym informacje zawarte w przekrojowych tablicach trwania życia zawierają wzorzec wymierania kohorty urodzonej w danym roku, jeżeli podlegałby (w ciągu trwania życia najdłużej żyjącej osoby z tej kohorty) warunkom wymierania obserwowanym w danym okresie. W Polsce tablice trwania życia (TTŻ) uwzględniające wielkości przedstawione w tabeli poniżej publikuje corocznie Główny Urząd Statystyczny (z uwagi na znaczne różnice trwania życia mężczyzn i kobiet TTŻ podaje się osobno dla każdej płci).

Tabela 2.1. Wielkości zawarte w TTŻ publikowanych przez GUS

Płeć 1-mężcz. 2-kobiety	Wiek	Liczba dożywających	Prawdopodobieństwo zgonu	Liczba zmarłych	Ludność stacjonarna	Ludność stacjonarna skumulowana	Przeciętne dalsze trwanie życia
	x	l_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x

Źródło: opracowanie własne.

Praktyka dostarcza nam obserwacji ujętych w przedziały wieku najczęściej roczne albo kilkuletnie, co pozwala na oszacowanie tylko funkcji dyskretnych, będących analogonami odpowiednich funkcji ciągłych. Funkcje przedstawiające rozkład trwania życia oraz zachorowalność należy konstruować na podstawie danych empirycznych i przedstawić w postaci tabelarycznej. W tradycyjnych tablicach trwania życia podstawowymi funkcjami biometrycznymi są (Bowers i in. 1986):

l_x – liczba osób dożywających wieku x,

d_x – liczba osób zmarłych w wieku x.

Obydwie funkcje zależą jedynie od wieku danej osoby i dotyczą tylko procesu umieralności, dlatego też nie charakteryzują w pełni danych potrzebnych przy kalkulacjach dotyczących polis z opcjami dodatkowymi. Polisy te mogą dotyczyć częściowego lub całkowitego uszczerbku na zdrowiu, będącego wynikiem choroby lub nieszczęśliwego wypadku i aby móc prawidłowo przeprowadzić kalkulacje dla takich polis, należy skonstruować tablice trwania życia, które uwzględnią te dodatkowe przypadki. Dlatego też w przypadku ubezpieczeń złożonych z opcjami dodatkowymi, przy włączeniu ryzyk dodatkowych, podstawą określenia prawdopodobieństw przejścia, o których mowa, jest informacja dotycząca tzw. wielorakich (wielostanowych) tablic trwania życia (WTTŻ). Tablice te zawierają dodatkowe informacje dotyczące stanu zdrowia oraz przyczyny śmierci, a tym samym stanowią teoretyczną konstrukcję umożliwiającą prowadzenie szczegółowych analiz procesu wymierania określonej populacji z uwzględnieniem stanów dodatkowych obejmujących różne przypadki życiowe (Błaszczyszyn, Rolski 2004). Co ważne, ich konstrukcja jest analogiczna do tradycyjnych tablic trwania życia TTŻ. Załóżmy więc, że wyróżnia się w populacji m ($m \geq 1$) różnych stanów zdrowia odpowiadających wielorakim przypadkom życiowym i tym samym możliwym opcjom ubezpieczenia, co przedstawiono w poniższej tabeli.

Tabela 2.2. Przykładowa klasyfikacja możliwych stanów zdrowia populacji

	Stany				
numer stanu	**H**	**1**	**...**	**m**	**D**
przypadek życiowy	zdrowy	-	...	-	śmierć
Opcje	-	Opcja 1	...	Opcja m	-

Źródło: opracowanie własne.

Tablice WTTŻ powinny zawierać funkcje biometryczne określone osobno zarówno dla grupy osób zdrowych, jak i grupy osób z określonym uszczerbkiem na zdrowiu (chorych, inwalidów czy niezdolnych do pracy). Tablice te są więc uogólnieniem tradycyjnych tablic trwania życia. Poniżej przedstawiono możliwe stany zdrowotne w populacji oraz zmiany ich liczebności.

Tabela 2.3. Stany zdrowotne w populacji i zmiany ich liczebności

Wiek	Stany				
	H	**1**	**...**	**m**	**D**
x	$\boldsymbol{l_x^0 \equiv l_x^H}$	l_x^1		l_x^m	
$x+1$	$\boldsymbol{l_{x+1}^0 \equiv l_{x+1}^H}$	l_{x+1}^1		l_{x+1}^m	

Źródło: opracowanie własne.

Każda z osób narażona jest na pewne przypadki życiowe, takie jak: choroba, nieszczęśliwy wypadek czy śmierć. Dlatego też spośród l_x osób, które dożywają wieku x, odpowiednio $l_x^0 \equiv l_x^H$ oznacza liczbę osób dożywających w zdrowiu wieku x oraz l_x^i dla $i = 1, 2, \ldots, m$ określa liczbę osób w wieku x z określonym uszczerbkiem na zdrowiu. Liczba osób dożywających wieku x tworzy więc proces stochastyczny. Z drugiej strony osoba zdrowa opuszcza grupę, gdy traci zdrowie z powodu choroby, nieszczęśliwego wypadku lub śmierci. Funkcję określająca liczbę osób, które utraciły zdrowie w wieku $(x, x+\tau)$, oznacza się $d_{x,x+\tau}^{Hi}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ oraz $d_{x,x+\tau}^{HD}$ odpowiednio oznacza liczbę osób zdrowych zmarłych w wieku $(x, x+\tau)$. Odpowiednio $d_{x,x+\tau}^{iH}$ dla grupy osób chorych określa liczbę osób, które wyzdrowiały w wieku $(x, x+\tau)$, zaś to $d_{x,x+\tau}^{iD}$ liczba osób z poszczególnych grup, które zmarły. W tradycyjnych tablicach trwania życia liczbę osób dożywających określonego wieku wyznacza się w sposób rekurencyjny. Analogicznie postępuje się również w przypadku wielostanowych tablic trwania życia. Zatem liczba osób zdrowych, które dożyły wieku $x+1$, jest to liczba osób zdrowych w wieku x powiększona o liczbą osób, które wyzdrowiały w okresie $(x, x+1)$, i pomniejszona o liczbę osób, które doznały uszczerbku na zdrowiu lub zmarły w tym okresie.

Tabela 2.4. Liczba osób zdrowych w wieku x+1

Wiek	Stany				
	H	**1**	**...**	**m**	**D**
x	$\boldsymbol{l_x^0 \equiv l_x^H}$	$+d_x^{1H}$		$+d_x^{mH}$	
		$-d_x^{H1}$		$-d_x^{Hm}$	$-d_x^{HD}$
$x+1$	$\boldsymbol{l_{x+1}^0 \equiv l_{x+1}^H}$	l_{x+1}^1		l_{x+1}^m	

Źródło: opracowanie własne.

Analogicznie uzyskujemy liczbę osób z określonym uszczerbkiem na zdrowiu (oznaczonym k) w wieku $x+1$. Jest to odpowiednio liczba osób chorych w wieku x powiększona o liczbę osób, które doznały określonej utraty zdrowia, i pomniejszona o liczbę osób, które wyzdrowiały, zachorowały na inne schorzenie objęte ubezpieczeniem lub zmarły.

Tabela 2.5. Liczba osób w wieku x+1 z określonym uszczerbkiem na zdrowiu

Wiek	**Stany**						
x	**H**	**1**	**...**	**K**	**…**	**m**	**D**
	$+d_x^{Hk}$	$+d_x^{1k}$		l_x^k		$+d_x^{mk}$	
	$+d_x^{Hk}$	$+d_x^{1k}$		l_x^k		$+d_x^{mk}$	
	$-d_x^{kH}$	$-d_x^{k1}$				$-d_x^{km}$	$-d_x^{kD}$
x+1				l_{x+1}^k			

Źródło: opracowanie własne.

Stąd otrzymuje się następujące wzory rekurencyjne określające liczbę osób dożywających wieku $x+1$ w określonym stanie:

$$l_{x+1}^k = \begin{cases} l_x^H + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} d_x^{iH} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} d_x^{Hi} - d_x^{HD} \text{ dla } k = H \\ l_x^k + d_x^{Hk} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} d_x^{ik} - d_x^{kH} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} d_x^{ki} - d_x^{kD} \text{ dla } k \neq H. \end{cases}$$

W tablicach trwania życia obok przedstawionych funkcji określa się również odpowiednie prawdopodobieństwa przejścia (zachorowalności, rekonwalescencji czy też zgonu). W szczególności prawdopodobieństwo, że osoba w wieku $(x, x+1)$ zmieni stan zdrowotny, oznacza się p_x^{jk}. W rzeczywistości wielkości tych prawdopodobieństw są nieznane, a w tablicy umieszcza się ich oceny następującej postaci:

$$\hat{p}_x^{jk} = \begin{cases} \dfrac{d_{x+1}^{jk}}{l_x^j} \; dla\; k \neq j \\ \dfrac{l_{x+1}^j}{l_x^j} \; dla\; k = j \end{cases} \quad \text{gdzie } j, k \in \{H, i, D\}.$$

Przedstawione powyżej oceny prawdopodobieństw uzyskane są metodą największej wiarygodności.

2.4. Parametryczne modele trwania życia jako alternatywa

W przeszłości, na gruncie badań demograficznych i aktuarialnych, aby uprościć skomplikowane rachunki przy budowie tablic trwania życia, podejmowano próby skonstruowania analitycznego opisu zjawiska śmiertelności występującej w danej populacji. Przyjmowano, że czas ludzki jest pewnym zjawiskiem fizycznym, które można opisać za pomocą wzorów analitycznych. Wówczas, gdy znana jest analityczna postać gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej T, oznaczającej czas życia jednostki (czas do wystąpienia określonego przypadku życiowego), mamy do czynienia z parametrycznym modelem przeżycia. Oznacza to, że znana jest postać wszystkich funkcji charakteryzujących wzorzec przeżycia: funkcji przeżycia i funkcji intensywności (hazardu). Konkretna postać tych funkcji musi wyrażać istotę przebiegu procesu przeżycia danej populacji (kohorty). Innymi słowy powinna wyrażać „prawo" określające ten proces. Najczęściej stosowane jako modele przeżycia w ich parametrycznej postaci są następujące prawa (Chiang 1984, London 1988): de Moivre'a, Gompertza i Makhehana.

Jako najstarsze literatura podaje prawo stworzone przez Abrahama de Moivre'a w 1725 r. Sugerował on istnienie nieprzekraczalnego wieku granicznego ω, jak również założył, że dalsze trwanie życia x-latka ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, \omega - x)$. Dlatego też natężenie wymierania (intensywność wymierania) w takim modelu wyraża się wzorem (de Moivre 1725):

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, t \in (0, \omega - x). \tag{2.6}$$

O hipotetycznej populacji, w której umieralność spełnia powyższe równanie, mówi się, że rządzi nią prawo umieralności de Moivre'a.

Od czasów de Moivre'a pojawiły się dalsze sugestie co do praw umieralności wyrażonych jako formuły matematyczne, z których najbardziej znana jest formuła stworzona w XIX w. na potrzeby nauk aktuarialnych przez Benjamina Gompertza (Gompertz 1825). W 1824 r. Benjamin Gompertz postawił hipotezę, że natężenie umieralności jest funkcją wykładniczą:

$$\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, B > 0, c > 1, t > 0. \tag{2.7}$$

Natomiast w 1860 r. William Makeham (Makeham 1860) uzupełnił formułę Gompertza o stały, niezależny od wieku człon, stanowiąc tym samym, że natężenie wymierania dla danego wieku jest sumą stałej wartości niezależnej od wieku i składnika zależnego od wieku wykładniczo:

$$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, B > 0, c > 1, t > 0. \tag{2.8}$$

To proste prawo okazało się być niezwykle dobrym modelem w różnych populacjach i w różnych grupach wiekowych (w szczególności stosunkowo poprawnie opisuje dynamikę śmiertelności w populacji dla przedziału wiekowego 30–80 lat), a wiele późniejszych praw jest jego modyfikacją.

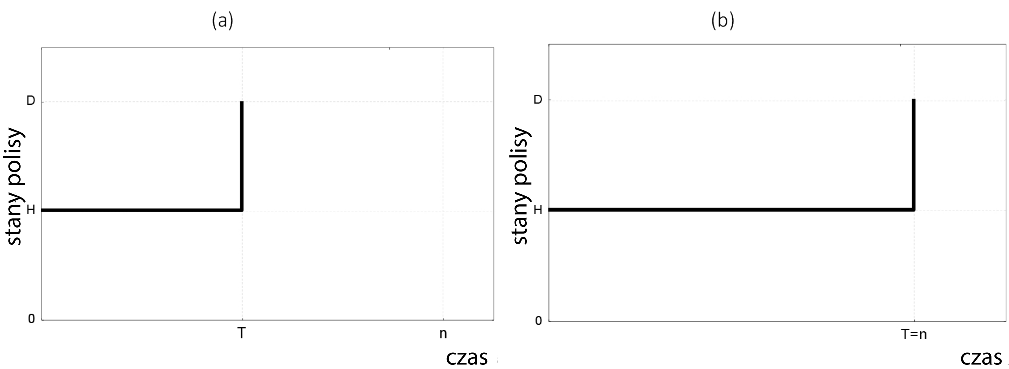
2.5. Model probabilistyczny wybranych ubezpieczeń złożonych

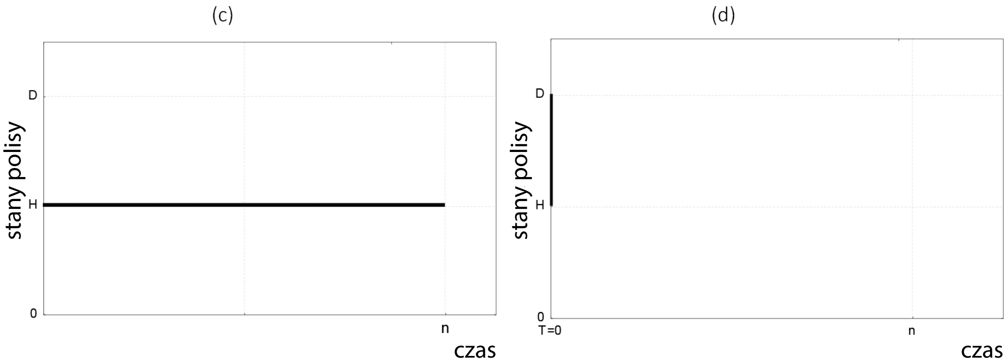
Najprostszym przykładem ubezpieczeń, których model probabilistyczny zostanie przedstawiony, są **tradycyjne ubezpieczenia na życie**. Ubezpieczenia te obejmują ubezpieczenie na życie (UŻ), czyste ubezpieczenie na dożycie (UD) oraz ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD). Przedmiotem takich ubezpieczeń jest życie ubezpieczonego. W wymienionych typach ubezpieczenia wyodrębnione są tylko dwa przypadki życiowe: życie i śmierć, które oznaczone są następująco

H – ubezpieczony żyje,

D – ubezpieczony zmarł.

Obserwowanym przypadkom życiowym zachodzącym w życiu ubezpieczonego podczas trwania umowy ubezpieczenia odpowiadają konkretne realizacje procesu. Wszystkie możliwe realizacje procesu zmiany stanów dla rozpatrywanej polisy przedstawione są na rysunku 2.2. Pierwsza i druga realizacja procesu przedstawiona na wykresie (a) i (b) odpowiada sytuacji, gdy ubezpieczony opłaca składki aż do momentu śmierci, która ma miejsce odpowiednio w okresie trwania ubezpieczenia i w ostatnim roku trwania polisy. Na wykresie (c) przedstawiona została realizacja procesu odpowiadająca sytuacji, gdy ubezpieczony przez cały okres ubezpieczenia jest zdrowy i opłaca składki zgodnie z zawartą umową. Natomiast realizacja przedstawiona na ostatnim wykresie odpowiada sytuacji, gdy ubezpieczony umiera natychmiast po podpisaniu umowy ubezpieczenia.





Rysunek 2.2. Możliwe realizacje procesu$\{X(t)\}_{t\in T}$, dla ubezpieczenia z *S* = *{H,D}*
Źródło: opracowanie własne.

Zatem model probabilistyczny tradycyjnych ubezpieczeń życiowych obejmujących UŻ, UD i UŻD jest dwustanowym modelem Markowa. Aby wyznaczyć rozkład procesu aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t\in T}$ w tego typu ubezpieczeniu, należy wyznaczyć następujące prawdopodobieństwa warunkowe:

${}_tp_x^{HD}$ – prawdopodobieństwo zgonu w wieku *x* + *t* osoby zdrowej w wieku *x*,

${}_tp_x^{HH}$ – prawdopodobieństwo, że osoba zdrowa w wieku *x* będzie również zdrowa w wieku *x* + *t*, czyli w momencie *t* trwania umowy,

${}_tp_x^{\overline{HH}}$ – prawdopodobieństwo, że osoba, która jest zdrowa w wieku *x*, pozostanie zdrowa przez cały okres do wieku *x* + *t*.

Prawdopodobieństwa ${}_tp_x^{HH}$ wyznacza się, rozwiązując równania różniczkowe Kołmogorowa, które w tym przypadku przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{HH} = -\,{}_tp_x^{HH}\mu(x+t).$$

Rozwiązaniem pierwszego równania różniczkowego jest ${}_tp_x^{HH}$ określone wzorem:

$${}_tp_x^{HH} = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau\right),$$

a prawdopodobieństwo zgonu ${}_tp_x^{HD}$ wyznacza się z warunku:

$${}_tp_x^{HD} = 1 - \,{}_tp_x^{HH}.$$

Ponieważ D jest stanem pochłaniającym, mamy:

$${}_tp_x^{\overline{HH}} = {}_tp_x^{HH}.$$

W przykładach omawianych w dalszych rozdziałach książki do obliczenia powyższych prawdopodobieństw wykorzystano intensywność zgonu opartą na prawie Gompertza-Makehana.

Przykładem funkcji intensywności dla tego rodzaju polisy są np. funkcje stosowane w pracach (Haberman, Pitacco 1999, Norberg 2004):

$$\mu_{HD}(t) = \mu(x+t) = 0{,}005 + 0{,}000075858 \cdot 10^{0{,}038(x+t)}$$

Parametry dla Polski oszacowano z wykorzystaniem metody największej wiarygodności, otrzymując parametry równe odpowiednio:

$$A = 0{,}00001, B = 0{,}000143493, C = 1{,}0869039.$$

Natomiast najpowszechniejszym przykładem złożonego ubezpieczenia w Polsce jest ubezpieczenie podstawowe, którym może być polisa typu UŻ, UD lub UŻD z wykupioną **opcją dodatkową powszechnie nazywaną nieszczęśliwy wypadek (NW)**, która może obejmować zarówno śmierć wskutek nieszczęśliwego wypadku, jak i trwałe inwalidztwo. W przypadku takiego ubezpieczenia przedmiotem umowy podstawowej jest życie ubezpieczonego w czasie trwania umowy lub dożycie ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia w zależności od przyjętego jej wariantu. Natomiast przedmiotem ubezpieczenia umowy dodatkowej jest zdrowie ubezpieczonego, a ochroną objęte jest całkowite lub częściowe trwałe inwalidztwo spowodowane nieszczęśliwym wypadkiem lub śmierć wskutek nieszczęśliwego wypadku. Zatem takiej umowie ubezpieczenia odpowiadają trzy przypadki życiowe ubezpieczonego:

H – ubezpieczony jest zdrowy,

NW – ubezpieczony ulega nieszczęśliwemu wypadkowi,

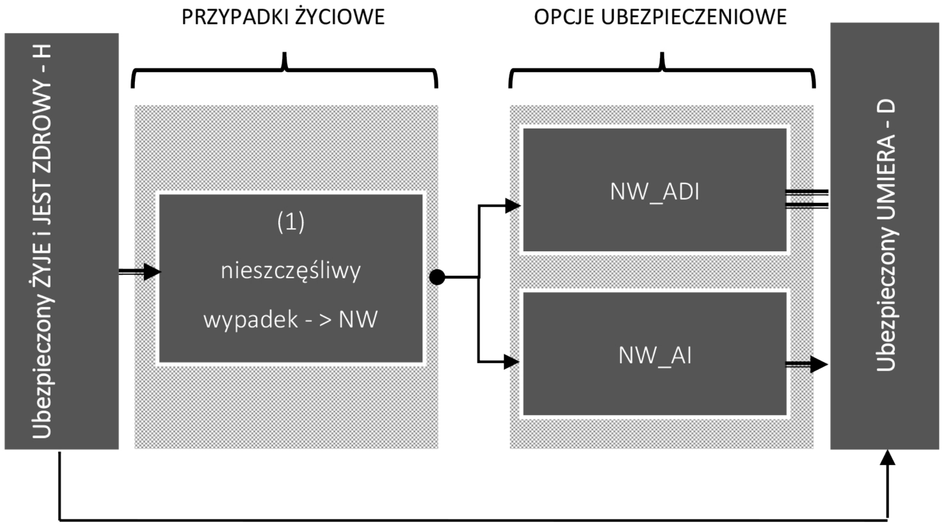
D – ubezpieczony zmarł.

Natomiast z jednym przypadkiem życiowym (NW), jaki ma miejsce w życiu ubezpieczonego, związanych może być kilka opcji dodatkowych w ubezpieczeniu. W tym przykładzie są to dwie opcje ubezpieczenia:

NW_ADI – *accidental death insurance* to ubezpieczenie na wypadek śmierci na skutek nieszczęśliwego wypadku. Realizacja opcji kończy ubezpieczenie.

NW_AI – *accident insurance* to opcja ubezpieczenia wypadkowego na skutek nieszczęśliwego wypadku nazywanego ubezpieczeniem od następstw nieszczęśliwych wypadków obejmująca wypłatę renty z tytułu niezdolności do pracy.

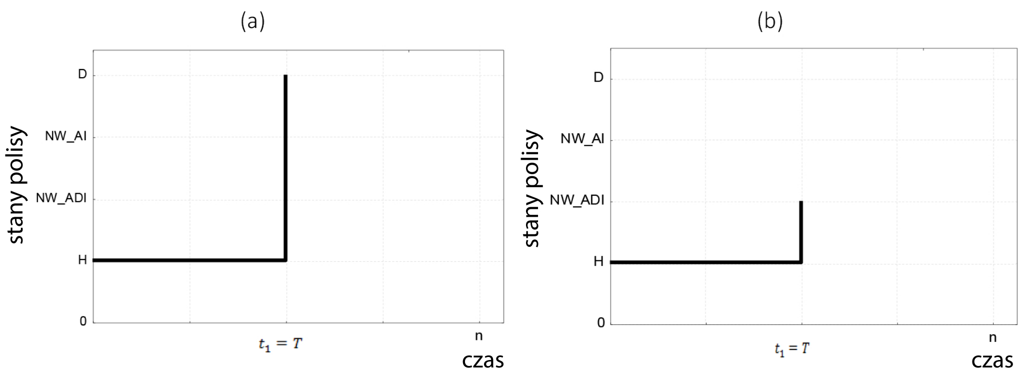
Zatem przestrzeń stanów w tego typu ubezpieczeniu jest bardziej złożona i uwzględniając możliwe przejścia między nimi, model probabilistyczny przedstawiono na poniższym rysunku.

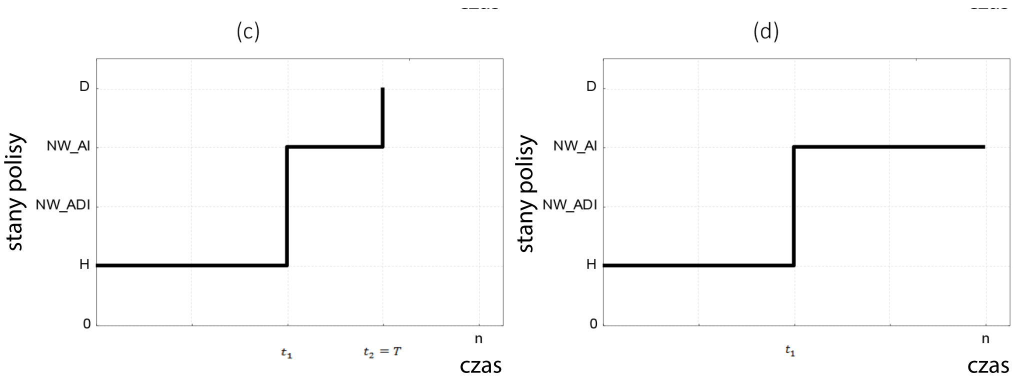


Rysunek 2.3. Schemat przestrzeni stanów i przejść między nimi dla ubezpieczeń UŻ, UD i UŻD z NW

Źródło: opracowanie własne

Model probabilistyczny ubezpieczenia podstawowego z wykupionymi opcjami dodatkowymi NW_ADI i NW_AI jest czterostanowym modelem Markowa (semi-Markowa). Przykładowe realizacje procesu aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t \in T}$ – odpowiadające różnym sytuacjom życiowym ubezpieczonego, jakie zaszły w okresie trwania ubezpieczenia, przedstawiono na rysunku 2.4.





Rysunek 2.4. Możliwe realizacje procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$, gdy *S= {H, NW_ADI, NW_AI, D}*
Źródło: opracowanie własne.

Wykres (a) przedstawia realizację procesu odpowiadającą sytuacji, gdy ubezpieczony był zdrowy aż do śmierci w chwili $t_1 = T$ (nigdy nie uległ nieszczęśliwemu wypadkowi). Pozostałe realizacje dotyczą sytuacji, gdy ubezpieczony ulega nieszczęśliwemu wypadkowi, ale ma to miejsce w różnych momentach trwania ubezpieczenia i z różnymi konsekwencjami. Na wykresie (b) nieszczęśliwy wypadek ma miejsce w momencie $t_1 = T$ i kończy się śmiercią ubezpieczonego. Realizacje przedstawione na wykresie (c i d) odpowiadają sytuacji, w której ubezpieczony ulega nieszczęśliwemu wypadkowi w momencie t_1 trwania ubezpieczenia i zostaje inwalidą aż do śmierci, która nastąpiła w chwili $t_2 = T$ (wykres c) w trakcie trwania ubezpieczenia i po wygaśnięciu umowy (wykres d).

Kolejnym krokiem zmierzającym do opisania modelu jest określenie prawdopodobieństw zajścia zdarzeń losowych objętych tym ubezpieczeniem. Ponieważ opcje dodatkowe wynikają z zajścia jednego zdarzenia losowego w życiu ubezpieczonego, oznacza to konieczność określenia następujących prawdopodobieństw:

$_tp_x^{HH}$ – prawdopodobieństwo, że osoba zdrowa w wieku *x*, będzie również zdrowa w wieku *x* + *t* czyli w momencie *t* trwania umowy,

$_tp_x^{\overline{HH}}$ – prawdopodobieństwo, że osoba, która jest zdrowa w wieku *x* pozostanie zdrowa przez cały okres do wieku *x* + *t*,

$_tp_x^{H1}$ – prawdopodobieństwo, że osoba zdrowa w wieku *x* ulegnie nieszczęśliwemu wypadkowi w wieku *x* + *t*,

$_tp_x^{1D}$ – prawdopodobieństwo zgonu osoby w wieku *x* + *t*, która uległa nieszczęśliwemu wypadkowi w wieku *x*,

$_tp_x^{\overline{11}}$ – prawdopodobieństwo, że osoba wieku *x* została inwalidą wskutek nieszczęśliwego wypadku i pozostanie inwalidą aż do wieku *x* + *t*,

$_tp_x^{HD}$ – prawdopodobieństwo zgonu w wieku *x* + *t* osoby zdrowej w wieku *x*,

$_tp_x^{1D}$ – prawdopodobieństwo zgonu w wieku *x* + *t* osoby zdrowej w wieku *x*.

Uwzględniając notację aktuarialną, w artykule przyjęto następujące oznaczenia prawdopodobieństw zmiany statusu polisy wieloopcyjnej z opcjami NW_AI i NW_ADI:

${}_{x}p_{t}^{HH}$ – prawdopodobieństwo, że osoba zdrowa w wieku *x* będzie również zdrowa w wieku *x* + *t*, czyli w momencie *t* trwania umowy,

${}_{x}p_{t}^{AI}$, ${}_{x}p_{t}^{ADI}$ – prawdopodobieństwa, że osoba zdrowa w wieku *x* ulegnie wypadkowi i skorzysta z opcji AI lub ADI w wieku *x* + *t*,

${}_{x}p_{t}^{AI/AI}$ – prawdopodobieństwa, że osoba chora i korzystająca z opcji AI w wieku *x* nadal korzysta z tej opcji w wieku *x* + *t*,

${}_{x}p_{t}^{AId}$ – prawdopodobieństwo śmierci w wieku *x* + *t* osoby, która skorzystała z opcji AI,

${}_{x}p_{t}^{Hd}$ – prawdopodobieństwo śmierci w wieku *x* + *t* osoby zdrowej w wieku *x*.

Prawdopodobieństwa te można wyznaczyć, rozwiązując równania różniczkowe Kołmogorowa, które dla tego przykładu są następującej postaci:

$$\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{x}^{HH} = -\,{}_{t}p_{x}^{HH}\big(\sigma(x+t)+\mu(x+t)\big),$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{x}^{SS} = -\,{}_{t}p_{x}^{SS}\nu(x+t), \text{ gdzie } S\epsilon\{ADI, AI\},$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{x}^{HS} = {}_{t}p_{x}^{HH}\sigma(x+t) - {}_{t}p_{x}^{HS}\nu(x+t), \text{ gdzie } S\epsilon\{ADI, AI\},$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{x}^{HD} = {}_{t}p_{x}^{HH}\mu(x+t) + {}_{t}p_{x}^{HS}\nu(x+t), \text{ gdzie } S\epsilon\{ADI, AI\},$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{x}^{SD} = -\,{}_{t}p_{x}^{SH}\mu(x+t), \text{ gdzie } S\epsilon\{ADI, AI\}.$$

Pierwsze dwa równania są to jednorodne równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu, których rozwiązania określone są odpowiednio wzorami:

$${}_{t}p_{x}^{HH} = \exp\left(-\int_{0}^{t}\big(\sigma(x+\tau)+\mu(x+\tau)\big)d\tau\right),$$

$${}_{t}p_{x}^{SS} = \exp\left(-\int_{0}^{t}\nu(x+\tau)d\tau\right).$$

Z uzyskanych rozwiązań wynika, że ${}_{t}p_{x}^{HH} = {}_{t}p_{\overline{x}}^{\underline{HH}}$ oraz ${}_{t}p_{x}^{SS} = {}_{t}p_{\overline{x}}^{\underline{SS}}$. Kolejne równanie jest równaniem niejednorodnym postaci:

$$\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{x}^{HS} + {}_{t}p_{x}^{HS}\nu(x+t) = {}_{t}p_{x}^{HH}\sigma(x+t).$$

Aby je rozwiązać, należy w pierwszej kolejności znaleźć całkę równania jednorodnego, które jest równaniem o rozdzielonych zmiennych:

$$-\frac{\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{x}^{HS}}{{}_{t}p_{x}^{HS}} = \nu(x+t).$$

Rozwiązanie powyższego równania jest następującej postaci:

$$ {}_tp_x^{HS} = \mathrm{C(t)}\exp\left(-\int_0^t \nu(x+\tau)d\tau\right). $$

Podstawiając uzyskane rozwiązanie do równania niejednorodnego, otrzymujemy równanie różniczkowe postaci:

$$ \frac{dC}{dt} = {}_tp_x^{HH}\sigma(x+t)\exp\left(-\int_0^t \nu(x+\tau)d\tau\right), $$

stąd

$$ C(t) = \int_0^t {}_up_x^{HH}\sigma(x+u)\exp\left(-\int_0^u \nu(x+\tau)d\tau\right)du. $$

Otrzymaną funkcję podstawiamy następnie do rozwiązania równania jednorodnego i ostatecznie otrzymujemy szukane prawdopodobieństwo:

$$ {}_tp_x^{HS} = \int_0^t {}_up_x^{HH}\sigma(x+u)\ {}_{t-u}p_{x+u}^{HS}du\,. $$

Pozostałe prawdopodobieństwa wyznacza się z warunków:

$$ {}_tp_x^{SD} = 1 - {}_tp_x^{SS}, $$

$$ {}_tp_x^{HD} = 1 - {}_tp_x^{HH} - {}_tp_x^{HS}. $$

Przykładem stosowanych funkcji intensywności dla tego rodzaju polisy są np. stosowane przez duńskie towarzystwa ubezpieczeniowe funkcje postaci (Haberman, Pitacco 1999, Norberg 2004):

$$ \mu_{HS}(t) = \sigma(x+t) = 0{,}0004 + 0{,}000003467 \cdot 10^{0{,}06(x+t)}, $$

$$ \mu_{HD}(t) = \mu_{SD} = \mu(x+t) = 0{,}005 + 0{,}000075858 \cdot 10^{0{,}038(x+t)}. $$

Do wyznaczenia prawdopodobieństwa przeżycia i śmierci wykorzystano polskie tablice trwania życia, natomiast funkcję umieralności $\mu(x+\tau)$ oraz intensywność zajścia nieszczęśliwego wypadku $\sigma(x+\tau)$ oparto na prawie Gompertza-Makehama. Estymatory największej wiarygodności parametrów zastosowanych funkcji hazardu dla Polski przedstawiono w tabeli 2.6.

Tabela 2.6. Estymatory największej wiarygodności funkcji Gompertza-Makehama

Parametry funkcji hazardu	$\mu(x+\tau)$	$\sigma(x+\tau)$
A	0,0000100	0,0004
B	0,000143493	3,4674E-06
C	1,0869039	1,148153621

Źródło: http://repozytorium.uni.lodz.pl/:8080/xmlui/bitsream/handle/11089/5393/Wiad%20Ubezp%202003%2011-12.pdf i www.biecek.pl/PASIK/uploads/AleksandraUrbaniec.pdf [dostęp: 21.01.2016].

Na tej podstawie, rozwiązując równania różniczkowe Chapmana-Kołmogorowa, wyznaczono prawdopodobieństwa pozostawania w stanie i przejścia w dowolnym momencie okresu ubezpieczenia, wykorzystane do dalszych kalkulacji. W ten sposób określony jest rozkład prawdopodobieństwa procesu Markowa stanowiący podstawę dalszej analizy ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi.

3. Wartość zaktualizowana i aktuarialna przepływów pieniężnych

3.1. Strumienie finansowe w ubezpieczeniu z opcjami dodatkowymi

Konkretnym przypadkom życiowym zachodzącym w życiu ubezpieczonego odpowiada konkretna realizacja procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$ i ustalone w warunkach ogólnych ubezpieczenia strumienie płatności. Wysokości strumieni finansowych powstałych w wyniku zawartej umowy ubezpieczenia stanowią podstawę analizy i oceny ubezpieczenia, odgrywając istotną rolę w ocenie efektywności decyzji kapitałowych ubezpieczyciela.

Definicja (Norberg 1990)

Strumieniem płatności nazywa się funkcję $C(t)$*, która każdej chwili czasu t przyporządkowuje płatność dokonaną przez ubezpieczonego i ubezpieczyciela w przedziale czasu* $(-\infty, t]$. *Jeśli* $\mathcal{T}$ *oznacza pewien dowolny zbiór na prostej rzeczywistej, to zapis* $C(\mathcal{T})$ *oznaczać będzie wielkość strumienia płatności dokonanych w każdym momencie okresu czasu* $\mathcal{T}$.

Z każdą umową ubezpieczenia związane są określone strumienie płatności dokonywane przez ubezpieczonego (składki) i ubezpieczyciela (świadczenia). Świadczenia wypłacane przez ubezpieczyciela w ubezpieczeniach z opcjami dodatkowymi można podzielić na cztery grupy (Homa 2011):

- renty (terminowe lub dożywotnie),
- świadczenie częściowe wypłacane z tytułu uszczerbku na zdrowiu,
- świadczenie w wysokości sumy ubezpieczenia wypłacane w okresie trwania ubezpieczenia w przypadku śmierci ubezpieczonego,
- świadczenia wypłacane z tytułu dożycia przez ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia.

W zależności od strony umowy ubezpieczenia te strumienie płatności mogą przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Zawsze jednak przyjmują wartości dodatnie, gdy są wpłatą, a wartości ujemne, gdy są wypłatą. Z punktu widzenia ubezpieczyciela składki tworzą strumień finansowy o dodatnich wartościach, gdyż są dla niego przychodem, natomiast wypłaty różnego rodzaju świadczeń przyjmują wartości ujemne, gdyż są wydatkiem firmy ubezpieczeniowej. Płatności te tworzą przepływy pieniężne między ubezpieczycielem a ubezpieczonym lub ubezpieczającym (jeśli to on opłaca składki), a określenie ich wielkości jest niezbędne do przeprowadzenia analizy aktuarialnej i wyceny polis ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi. Zatem funkcja płatności $C(t)$ powinna uwzględniać wszystkie płatności odpowiadające różnym przypadkom życiowym zachodzącym w życiu ubezpieczonego, które objęte zostały ochroną ubezpieczeniową. W pracy przyjęto następujące oznaczenia poszczególnych strumieni płatności:

- $\pi_j(t)$ to wielkość składki płaconej przez ubezpieczonego (ubezpieczającego) w momencie *t* przy aktywnej opcji *j*,
- $r_j(t)$ to wysokość renty wypłacanej w momencie *t*, z tytułu niepełnosprawności typu *j*,
- $d_j(n)$ to wysokość jednorazowego świadczenia wypłaconego przez ubezpieczyciela z tytułu dożycia końca okresu ubezpieczenia przy aktywnej *j*-tej opcji ubezpieczenia,
- $c_{jk}(t)$ to jednorazowe świadczenie związane ze zmianą aktywnej opcji z *j* na *k* w okresie trwania ubezpieczenia w momencie *t*.

Zatem wyróżnione płatności tworzą strumienie związane z aktywną *j*-tą opcją ubezpieczenia, do których zaliczono: $\Pi_j(\mathcal{T})$ to strumień napływu składek oraz strumienie wypłaconych świadczeń oznaczonych $R_j(\mathcal{T})$ i $\mathrm{D}_j(\mathcal{T})$. Ponadto funkcja $\mathrm{W}_j(\mathcal{T})$ będzie funkcją określającą łączne wypłacane przez ubezpieczyciela świadczenia związane ze stanem *j*. Funkcja ta obejmuje więc świadczenia wypłacane w postaci renty lub też jednorazowego świadczenia wypłacanego z tytułu dożycia przez ubezpieczonego określonego wieku. Natomiast niech funkcja $\widetilde{\mathrm{W}}_j(\mathcal{T})$ będzie funkcją uwzględniającą wszystkie płatności związane ze stanem *j,* dokonane w okresie czasu $\mathcal{T}$, zatem funkcja ta obejmuje dodatkowo składki płacone przez ubezpieczonego (ubezpieczającego).

Druga grupa płatności związana jest ze zmianą stanu przez proces aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t\in T}$ i do tej grupy należą wszystkie pozostałe świadczenia wypłacane np. z tytułu śmierci ubezpieczonego lub trwałego uszczerbku na zdrowiu (inwalidztwa) czy też innego przypadku życiowego objętego umową. Są one wypłacane w momencie zajścia zdarzenia losowego, a więc w dowolnym momencie trwania ubezpieczenia. Stanowią zatem część ciągłą strumienia płatności. W tym przypadku symbol $c_{jk}(t)$ oznacza wielkość jednorazowego świadczenia wypłaconego w momencie *t*, jeśli w tym momencie nastąpiło przejście procesu aktywizacji opcji ze stanu *j* do stanu *k*.

3.2. Wartość zaktualizowana strumieni płatności

W dziedzinie ubezpieczeń na życie oraz tzw. rent życiowych ze względu na analizę działalności ubezpieczyciela w dłuższych okresach konieczne jest branie pod uwagę zmienności wartości pieniądza w czasie. Dlatego też w kalkulacjach dotyczących ubezpieczeń na życie podstawową rolę odgrywa zaktualizowana wartość kwoty, która będzie wypłacona w przyszłości, tzn. aktualny ekwiwalent przyszłych płatności (Norberg 1992, Homa 2004, Błaszczyszyn, Rolski 2004). Przy szacowaniu przewidywanych dochodów i wydatków w długoterminowych inwestycjach istotny jest czynnik czasu. Dlatego też w stosunku do strumieni płatności, w celu określenia wartości zaktualizowanej płatności, stosuje się dyskontowanie w dowolnym momencie trwania ubezpieczenia, a w szczególności na moment zawierania umowy ubezpieczeniowej. Do tego celu wykorzystywana jest funkcja dyskontująca (oznaczona jest symbolem $v(t)$), której postać zależy od sposobu kapitalizacji oraz wielkości stopy procentowej. Wówczas zaktualizowana wartość (na moment $t = 0$) jednostki wypłaconej w chwili s jest równa $v(s)$ i analogicznie wartość zaktualizowana (na moment $t > 0$) jednostki wypłaconej w chwili s jest równa $\frac{v(s)}{v(t)}$.

Definicja: (Norberg 2004b)

Wycena strumienia finansowego F_t czyli funkcja zaktualizowanych na moment t płatności dokonanych w okresie czasu $\mathcal{T}$ określona jest następującym wzorem:

$$PV_t^F(\mathcal{T}) = \frac{1}{v(t)} \int_{\mathcal{T}} v(\tau) dF(\tau).$$

W szczególności jeśli strumień finansowy F_t związany jest z aktywną j-tą opcją ubezpieczenia to zaktualizowana na moment t jego wartość jest równa:

$$PV_{t,j}^F(\mathcal{T}) = \frac{1}{v(t)} \int_{\mathcal{T}} v(\tau) dF(\tau).$$

Jeśli moment $t = 0$, wówczas stosowane jest odpowiednio oznaczenie: $PV^F(\mathcal{T})$ oraz $PV_j^F(\mathcal{T})$.

Gdy rozpatrywany jest model kapitalizacji ciągłej, stopy procentowe zastępowane są intensywnością oprocentowania. W tym przypadku funkcja dyskontująca dana jest wzorem:

$$v(t) = e^{-\delta t}.$$

Zatem w modelu kapitalizacji ciągłej zaktualizowana na moment t wartość strumieni płatności przyjmuje następującą postać:

$$PV(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau - t)} dF(\tau).$$

Według powyższego wzoru wycenia się wszystkie strumienie finansowe związane z ubezpieczeniem, innymi słowy wyznacza się zaktualizowaną wartość: strumienia napływu składek oraz wypłacanych świadczeń w postaci rent, jak również świadczeń jednorazowych z tytułu dożycia określonego wieku i z tytułu zajścia określonego przypadku życiowego. Należy zauważyć, że w każdym z tych przypadków wartość zaktualizowana jest procesem losowym, którego rozkład zależy od rozkładu procesu Markowa $\{X(t)\}_{t\in T}$.

Zaktualizowana wartość (na moment *t*) składek wpłaconych przez ubezpieczonego w dowolnym okresie trwania umowy jest następującej postaci:

$$PV_t^{\Pi} = \sum_{j\in S} PV_{t,j}^{\Pi}(\mathcal{T}) = \sum_{j\in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)} \mathbb{I}\{T > \tau\}\mathbb{I}\{X(\tau) = j\} d\Pi_j(\tau),$$

gdzie $\mathbb{I}\{A\}$ to indykator zbioru *A*.

Analogicznie wyznaczana jest zaktualizowana wartość renty wypłaconej przez ubezpieczyciela w dowolnym okresie $\mathcal{T}$, która wyraża się wzorem:

$$PV_t^{R} = \sum_{j\in S} PV_{t,j}^{R}(\mathcal{T}) = \sum_{j\in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)} \mathbb{I}\{T > \tau\}\mathbb{I}\{X(\tau) = j\} dR_j(\tau).$$

W obu wzorach całki po prawej stronie są to tzw. całki Riemanna-Stieltjesa (por. [1,9,63]). Jeśli płatności dokonywane są w sposób ciągły, to wysokość składki płaconej przez ubezpieczonego w momencie *t*, gdy proces $X(t)$ w tym momencie jest w stanie *j*, to $\pi_j(t)$ oraz odpowiednio wysokość raty renty płaconej to $c_j(t)$, wówczas:

$$d\Pi_j(\tau) = \pi_j(t)dt,$$

$$dR_j(\tau) = r_j(t)dt.$$

W tym przypadku całka Riemanna-Stieltjesa jest zwykłą całką Riemanna, a $\pi_j(t)$ i $r_j(t)$ nazywane są intensywnościami płatności odpowiednio składek i rent. Natomiast w przypadku, gdy płatności dokonywane są w ustalonych odstępach czasu (rok, kwartał, miesiąc itp.) z góry lub z dołu, wówczas mamy do czynienia z całką Stieltjesa. Mianowicie składki ubezpieczeniowe ubezpieczony płaci z góry, tzn. na początku okresu, natomiast raty renty wypłacane są zawsze z dołu, czyli na koniec okresu, którego dotyczą. Zatem dla okresu $[\nu, \nu + 1]$ składka zapłacona zostanie w chwili *v*, natomiast ratę renty wypłaci ubezpieczyciel w chwili $v + 1$. W tym przypadku dla ustalonych odstępów czasu $v = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzą równości:

$$d\Pi_j(\tau) = \pi_j(t)\lfloor dt \rfloor, \text{ dla } \nu \le t \le \nu + 1,$$

$$\mathrm{d}R_j(\tau) = r_j(t)\lceil \mathrm{dt} \rceil, \text{ dla } \nu \le t \le \nu + 1.$$

Wówczas zaktualizowana wartość składek jest następującą sumą Stieltjesa:

$$PV_t^{\Pi} = \sum_{j \in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} d\Pi_j(\tau)$$

$$= \sum_{j \in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} \pi_j(\tau) \lfloor d\tau \rfloor \quad (3.1)$$

$$= \sum_{j \in S} \sum_{\nu \in \mathcal{T}} e^{-\delta(\nu - t)} \mathbb{I}\{T > \nu\} \mathbb{I}\{X(\nu) = j\} \pi_j(\nu)$$

i analogicznie w przypadku rent mamy:

$$PV_t^{\mathrm{R}} = \sum_{j \in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} dR_j(\tau)$$

$$= \sum_{j \in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} r_j(\tau) \lceil d\tau \rceil \quad (3.2)$$

$$= \sum_{j \in S} \sum_{\nu \in \mathcal{T}} e^{-\delta(\nu + 1 - t)} \mathbb{I}\{T > \nu + 1\} \mathbb{I}\{X(\nu + 1) = j\} r_j(\nu + 1).$$

Z tytułu dożycia ustalonego momentu przy aktywnej opcji j ubezpieczyciel wypłaci ubezpieczonemu świadczenie w wysokości $d_j(\nu)$, którego wartość zaktualizowana na moment t to $ZD_j^t(\nu)$ jest równa:

$$e^{-\delta(\nu - t)} \mathbb{I}\{T > \nu\} \mathbb{I}\{X(\nu) = j\} d_j(\nu).$$

Wówczas zaktualizowana wartość tych świadczeń wypłaconych przez ubezpieczyciela w okresie czasu $\mathcal{T}$ jest następująca:

$$PV_t^{\mathrm{D}} = \sum_{j \in S} PV_{t,j}^{\mathrm{D}}(\mathcal{T}) = \sum_{j \in S} \sum_{\nu \in \mathcal{T}} e^{-\delta(\nu - t)} \mathbb{I}\{T > \nu\} \mathbb{I}\{X(\nu) = j\} d_j(\nu). \quad (3.3)$$

Zauważmy, że jest to suma Stieltjesa, którą można zapisać jako następującą całkę Riemanna-Stieltjesa:

$$PV_t^{\mathrm{D}} = \sum_{j \in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} d_j(\tau) d\tau$$

$$= \sum_{j \in S} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} dD_j(\tau). \quad (3.4)$$

Rozpatrując płatności związane ze zmianą stanu, czyli świadczenia jednorazowe wypłacane w przypadku zajścia określonego zdarzenia objętego umową ubezpieczeniową, należy zauważyć, że w dowolnym okresie czasu $\mathcal{T}$ proces aktywizacji opcji $\{X(t)\}$ może kilkakrotnie zmienić aktywny stan. Zatem niech $N_{jk}(t)$oznacza liczbę przejść procesu $\{X(t)\}$ ze stanu j do k w czasie $[0,t]]$, co zapisuje się następująco (Szkutnik 1998):

$$\mathrm{N}_{jk}(t) = \#\{\tau \in [0,t]: X(\tau) = j \wedge X(\tau^+) = k\}.$$

Wówczas zaktualizowana wartość (na moment t) świadczenia w wysokości $\mathrm{c}_{jk}(\tau)$ wypłaconego w chwili τ, jeśli nastąpiło przejście procesu ze stanu j do stanu k, dana jest wzorem:

$$PV_{t,jk}^{C} = e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{I}\{X(\tau^-) = j \wedge X(\tau^+) = j\}\mathrm{c}_{jk}(\tau).$$

Natomiast zaktualizowana wartość (na moment t) sumy wszystkich świadczeń $c_{jk}(t)$ wypłaconych w okresie $\mathcal{T}$ w związku z przypadkami życiowymi jest procesem losowym postaci:

$$PV_t^C = \sum_{j\in S}\sum_{k\neq j} PV_{t,jk}^{C} = \sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{c}_{jk}(\tau)d\mathrm{N}_{jk}(t).$$

Zaktualizowana wartość strumieni płatności zależy od wielorakich przypadków życiowych zachodzących w życiu ubezpieczonego, tak więc jest procesem losowym, którego rozkład zależy od rozkładu procesu $\{X(t)\}_{t\in T}$. Stąd też aby policzyć wielkość strumieni płatności, należy posłużyć się którymś z parametrów procesu. Zwykle wykorzystywana jest wartość oczekiwana, która nazywana jest wartością aktuarialną.

3.3. Wartość aktuarialna strumieni płatności

Wartość aktuarialna strumienia płatności w klasycznym ubezpieczeniu na życie i dożycie to wartość oczekiwana zaktualizowanej na moment płatności dokonanych w okresie $\mathcal{T}$. W ubezpieczeniu z opcjami dodatkowymi obejmującym różne przypadki życiowe, dokonując wyceny strumieni płatności, należy uwzględnić historię procesu aktywizacji opcji $\{X(t)\}$. Do analizy tego typu polis wykorzystana została głównie metodyka analizy przepływów pieniężnych i ich wartości aktuarialnych zaproponowana między innymi przez Norberga (1990, 1996), podstawę której stanowią odpowiednio przystosowane procesy Markowa. Stąd wartość aktuarialną płatności w tego typu ubezpieczeniu należy wyznaczyć jako warunkową wartość oczekiwaną płatności, pod warunkiem całej historii procesu $\{X(t)\}$ oznaczonej $\mathcal{F}_t$. Zatem jest ona równa:

$$E[PV_t^F(\mathcal{T})|\mathcal{F}_t]. \tag{3.6}$$

Wartość aktuarialna świadczenia lub składki w klasycznych ubezpieczeniach na życie lub dożycie jest wartością oczekiwaną zaktualizowanej wielkości świadczenia lub składki. W ubezpieczeniu na życie i dożycie wartość aktuarialna strumienia płatności obliczana jest jako warunkowa wartość oczekiwana zdyskontowanych płatności, pod warunkiem całej historii procesu i określana ogólnym wzorem (Bowers i in. 1997):

$$E[PV_t^F(\mathcal{T})|\mathcal{F}_t] = E\left[\frac{1}{v(t)}\int_{\mathcal{T}} v(\tau)dF(\tau)\,|\mathcal{F}_t\right],$$

gdzie $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le\mathcal{T}}$ – filtracja określająca historię procesu w chwili t.

Nowy system oceny wypłacalności zgodny z SOLVENCY II ma być dopasowany do rzeczywistych ryzyk, na jakie narażone są firmy ubezpieczeniowe. W przypadku instytucji ubezpieczeniowych potencjalne ryzyka są specyficzne dla typów zawieranych umów, a przepływy pieniężne powinny być wyceniane, biorąc pod uwagę całkowite ryzyko, na które narażony jest ubezpieczyciel, tzn. z uwzględnieniem filtracji określającej pełną informację dostępną w chwili *t* dotyczącą opcji ubezpieczenia, procesu śmiertelności (zachorowalności), jak również kształtowania się stóp procentowych. W związku z tym historię (filtrację) można podzielić na trzy grupy, które należy uwzględnić przy wycenie:

– $\mathcal{G}_t$ interpretowane jako wiedza o wartości jednostki pieniężnej,
– $\mathcal{L}_t$ to wiedza o opcjach kontraktu,
– $\mathcal{H}_t$ to wiedza o procesie umieralności.

Filtracja $\mathcal{L}_t$ interpretowana jako ryzyko opcji kontraktu determinuje proces aktywizacji opcji oraz rodzaj przepływów pieniężnych wynikających z zawartej polisy ubezpieczeniowej. Ponadto zakłada się, że rynek finansowy jest idealny i wszyscy mają taką samą wiedzę o nim, a informacje otrzymywane są wyłącznie z procesu wartości jednostki pieniężnej B_t czyli przyjętej stopy procentowej. Wówczas o σ-ciele $\mathcal{G}_t$ interpretowanym jako wiedza o rynku finansowym uzyskana do chwili *t* zakładamy, że: $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t^B$. Natomiast σ-ciało $\mathcal{H}_t$ to wiedza uzyskana do chwili *t* o procesie umieralności, a informacje o nim determinuje przyszły czas życia ubezpieczonego w wieku *x* lat oznaczonego $T_x \equiv T$. Zatem filtracja $\mathcal{F}_t$ określająca pełną informację dostępną w chwili *t* dotyczącą zmiany wartości pieniądza w czasie, procesu śmiertelności i aktywizacji opcji ma postać:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{L}_t \wedge \mathcal{G}_t \wedge \mathcal{H}_t. \tag{3.8}$$

Zatem przyjmując:
– model kapitalizacji ciągłej,
– $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t^T = \sigma(I(T > t), 0 \le t \le n)$,
– proces aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t\ge0}$ jest procesem Markowa, a to oznacza, że przy obliczaniu wartości oczekiwanej uwzględnia się jedynie stan teraźniejszy procesu.

Wartość aktuarialna płatności dana jest następującym wzorem:

$$E[PV_t^F(\mathcal{T})|\mathcal{L}_t \wedge \mathcal{G}_t \wedge \mathcal{H}_t] =$$
$$E\left[\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)} dF(\tau)\,|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i\right]. \qquad (3.9)$$

Powyższy wzór stanowi podstawę do obliczenia wartości aktuarialnych wszystkich strumieni płatności dla ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi (Haberman, Pitacco 1999, Wolthuis 2003). Wartość aktuarialna (wartość oczekiwana zaktualizowanych na moment *t*) składek wpłaconych przez ubezpieczonego w dowolnym okresie czasu $\mathcal{T}$, przy aktywnej w momencie *t i*-tej opcji polisy, dana jest następującym wzorem:

$$E[PV_t^{\Pi}|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i] =$$
$$E\left[\sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}d\Pi_j(\tau)\,|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i\right]$$
$$= \sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{P}(T>\tau|T>t)\mathbb{P}(X(\tau)=j|X(t)=i)d\Pi_j(\tau).$$

Przy wykorzystaniu notacji aktuarialnej powyższy wzór zapisany będzie następująco:

$$E[PV_t^{\Pi}|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i] =$$
$$\sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}d\Pi_j(\tau) = \sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\pi_j(\tau)[d\tau] \qquad (3.10)$$
$$\sum_{j\in S}\sum_{\nu\in\mathcal{T}} e^{-\delta(\nu-t)}\ {}_{\nu-t}p_{x+t}^{ij}\pi_j(\nu).$$

Analogicznie oblicza się wartość aktuarialną renty wypłacanej przez ubezpieczyciela i wzór w tym przypadku ma postać:

$$E[PV_t^{R}|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i] =$$
$$\sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}dR_j(\tau) = \sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}r_j(\tau)[d\tau] \qquad (3.11)$$
$$= \sum_{j\in S}\sum_{\nu\in\mathcal{T}} e^{-\delta(\nu+1-t)}\ {}_{\nu+1-t}p_{x+t}^{ij}r_j(\nu+1).$$

Wartość aktuarialna sumy $d_j(s)$ wypłaconej jednorazowo w ustalonym momencie *s*, jeżeli proces $\{X(t)\}$ jest wówczas w stanie *j*, dana jest wzorem:

$$E[PV_t^D|\sigma(\mathrm{I}(T>t),0\le t\le n)\wedge X(t)=i]=$$

$$E\left[\sum_{j\in S}\sum_{\nu\in\mathcal{T}}e^{-\delta(\nu-t)}\mathbb{I}\{T>\nu\}\mathbb{I}\{X(\nu)=j\}d_j(\nu)\,|\sigma(\mathrm{I}(T>t),0\le t\le n)\wedge X(t)=i\right]$$

$$=\sum_{j\in S}\sum_{\nu\in\mathcal{T}}e^{-\delta(\nu-t)}\mathbb{P}(T>\nu|T>t)\mathbb{P}(X(\nu)=j|X(t)=i)d_j(\nu).$$

Po uwzględnieniu notacji aktuarialnej powyższy wzór ma postać:

$$E[PV_t^D|\sigma(\mathrm{I}(T>t),0\le t\le n)\wedge X(t)=i]$$
$$=\sum_{j\in S}\sum_{\nu\in\mathcal{T}}e^{-\delta(\nu-t)}\;{}_{\nu-t}p_{x+t}^{ij}d_j(\nu)=\sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}}\;e^{-\delta(\tau-t)}\;{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}dD_j(\tau). \tag{3.12}$$

W przypadku sumy ubezpieczenia wypłacanej przez ubezpieczyciela w momencie przejścia procesu $\{X(t)\}$ ze stanu *j* do stanu *k,* wartość aktuarialną procesu losowego danego wzorem można określić w następujący sposób:

$$E[PV_t^C|\sigma(\mathbb{I}(\mathrm{T}>\mathrm{t}),0\le\mathrm{t}\le\mathrm{n})\wedge X(t)=i]$$

$$=\;E\left[\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}}\;e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{c}_{jk}(\tau)d\mathrm{N}_{jk}(\tau)\,|\sigma(\mathbb{I}(\mathrm{T}>\mathrm{t}),0\le\mathrm{t}\le\mathrm{n})\wedge X(t)=i\right]$$

$$=\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}}\;e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{c}_{jk}(\tau)E\big[d\mathrm{N}_{jk}(\tau)|\sigma(\mathbb{I}(\mathrm{T}>\mathrm{t}),0\le\mathrm{t}\le\mathrm{n})\wedge X(t)=i\big]$$

$$=\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}}\;e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{c}_{jk}(\tau)E\big[\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}\mu_{jk}(\tau)d\tau|\sigma(\mathrm{I}(\mathrm{T}>\mathrm{t}),0\le\mathrm{t}\le\mathrm{n})\wedge X(t)=i\big].$$

Korzystając z definicji warunkowej wartości oczekiwanej, otrzymuje się więc:

$$E[PV_t^C|\sigma(\mathbb{I}(\mathrm{T}>\mathrm{t}),0\le\mathrm{t}\le\mathrm{n})\wedge X(t)=i]$$
$$=\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}}\;e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{c}_{jk}(\tau)\mathbb{P}\{X(\tau)=j|X(t)=i\}\mu_{jk}(\tau)d\tau.$$

Uwzględniając notację aktuarialną, wartość aktuarialna sumy ubezpieczenia wyraża się następującym wzorem:

$$E[PV_t^C|\sigma(\mathbb{I}(\mathrm{T}>\mathrm{t}),0\le\mathrm{t}\le\mathrm{n})\wedge X(t)=i]$$
$$=\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}}\;e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{c}_{jk}(\tau)\;{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau. \tag{3.13}$$

Wartości aktuarialne strumieni płatności są podstawowym miernikiem wykorzystywanym w dalszej analizie przepływów pieniężnych wynikających z zawartych umów ubezpieczenia.

3.4. Wartość zaktualizowana i aktuarialna strumieni płatności wybranych polis

Przykłady stanowią kontynuację dwóch omówionych umów ubezpieczenia:

1. Tradycyjnego ubezpieczenia na życie (UŻ, UD, UŻD).
2. Podstawowego (UŻ, UD, UŻD) z opcją dodatkową powszechnie nazywaną nieszczęśliwy wypadek (NW) – w tym przypadku uwzględniono opcje NW_ADI oraz NW_AI.

Model probabilistyczny powyższych umów został przedstawiony i opisany w podrozdziale 2.4. Przedstawienie modelu probabilistycznego polisy z opcjami dodatkowymi stanowi pierwszy etap opisu złożonej umowy ubezpieczenia. Kolejnym elementem analizy jest określenie rodzajów płatności stanowiących podstawę wyceny ubezpieczenia i dalszych kalkulacji z nią związanych. Zakłada się, że we wszystkich rodzajach ubezpieczeń, ubezpieczony opłaca składki o stałej wysokości, które określone są następująco:

$$\pi_H(t) = \begin{cases} \pi & dla \;\; 0 \le t \le n \\ 0 & dla \;\; t > n \end{cases}.$$

Natomiast rodzaj świadczenia wypłacanego przez ubezpieczyciela zależy od zawartej umowy ubezpieczenia. W ubezpieczeniu na życie (UŻ) wypłata sumy ubezpieczenia w wysokości c jednostek pieniężnych następuje w przypadku zgonu ubezpieczonego w okresie trwania ubezpieczenia. W ubezpieczeniu na dożycie (UD) świadczenie w wysokości d jednostek pieniężnych wypłacane jest wówczas, gdy ubezpieczony dożył końca okresu ubezpieczenia. Natomiast ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD) obejmuje obie te sytuacje. Dla tych ubezpieczeń mamy więc następujące strumienie płatności:

$$c_{HD}(t) = \begin{cases} c & dla \quad 0 < t \le n \\ 0 & dla \quad t > n \end{cases}, \; d_H(t) = \begin{cases} d & dla \quad t = n \\ 0 & dla \quad poza\ tym \end{cases}.$$

Umowy ubezpieczenia UŻ, UD i UŻD nie przewidują innych wypłat, dlatego też można zapisać:

$$r_H(t) = r_D(t) = c_{DH}(t) = d_D(t) = 0 \text{ dla } t \ge 0.$$

Zaktualizowane wartości powyższych strumieni płatności wyznaczone na podstawie wzorów (3.1-3.5) oraz ich wartości aktuarialne wyznaczone ze wzorów (3.9-3.13) zamieszczone są w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Wartość zaktualizowana i aktuarialna całkowitych strumieni płatności dla UŻ/UD

Rodzaje strumieni płatności	Wartość zaktualizowana	Wartość aktuarialna
	na moment zawarcia umowy	
Wpłacone składki	$PV_H^{\Pi}(0,n) = \pi \int_0^n e^{-\delta s} I_H(s)ds$	$E(PV_H^{\Pi}(0,n)\vert X(0) = H) = \pi \int_0^n e^{-\delta s}\ {}_sp_x^{HH} ds$
Świadczenie jednorazowe wypłacone z tytułu śmierci (UŻ)	$PV_{HD}^C(0,n) = c \int_0^n e^{-\delta s} dN_{HD}(s)$	$E(PV_{HD}^C(0,n)\vert X(0) = H) = \int_0^n e^{-\delta s}\ {}_sp_x^{HH} \mu(x+s)ds$
Świadczenie z tytułu dożycia (UD)	$PV_D^D(0,n) = de^{-\delta n} I_H(n)$	$E(PV_D^D(0,n)\vert X(0) = H) = de^{-\delta n}\ {}_np_x^{HH}$

Źródło: opracowanie własne.

Analiza przepływów pieniężnych i ich wycena może dotyczyć nie tylko całkowitych, ale również przyszłych strumieni, co oznacza konieczność dyskontowania na dowolny moment trwania ubezpieczenia z uwzględnieniem aktywnej w tym momencie opcji. Ponieważ w tradycyjnym ubezpieczeniu nie zachodzi proces aktywizacji opcji, przepływy te wycenia się analogicznie jak całkowite.

Natomiast w przypadku *n*-letniego złożonego ubezpieczenia obejmującego umowę ubezpieczenia podstawowego typu UŻ, UD lub UŻD wraz z umową dodatkową dotyczącą nieszczęśliwego wypadku (NW) ochrona ubezpieczeniowa obejmuje dodatkowo utratę zdrowia i związaną z tym utratę zdolności do pracy wskutek nieszczęśliwego wypadku. Przedmiotem ubezpieczenia umowy podstawowej jest więc życie ubezpieczonego, który otrzyma wypłatę sumy ubezpieczenia w zależności od przyjętego wariantu z tytułu śmierci w okresie trwania ubezpieczenia lub dożycia końca okresu ubezpieczenia. Przedmiotem umowy dodatkowej natomiast jest zdrowie ubezpieczonego, a zakresem opcji NW_AI oraz NW_ADI objęte jest całkowite lub częściowe trwałe inwalidztwo spowodowane nieszczęśliwym wypadkiem. W związku z tym w przypadku doznania przez ubezpieczonego trwałego uszczerbku na zdrowiu w wyniku nieszczęśliwego wypadku firma ubezpieczeniowa w momencie uznania inwalidztwa (opcja NW_AI) dokonuje wypłaty jednorazowego świadczenia, np. na rehabilitacje i ewentualne operacje w wysokości ustalonego % sumy ubezpieczenia, ponadto ubezpieczyciel wypłaca także rentę inwalidzką. W przypadku śmierci ubezpieczonego w wyniku nieszczęśliwego wypadku firma ubezpieczeniowa zgodnie z umową dodatkową (opcja NW_ADI) wypłaca jednorazowo świadczenie ustalonej w OWU kwoty z tytułu śmierci wskutek nieszczęśliwego wypadku (najczęściej jest to dwukrotność sumy ubezpieczenia). Z tak skonstruowanym ubezpieczeniem związane są więc następujące strumienie płatności:

– składki opłacane w okresie trwania ubezpieczenia:

$$\pi_H(t) = \begin{cases} \pi & dla \quad 0 \le t \le n \\ 0 & dla \quad t > n \end{cases},$$

– renta wypłacana z tytułu opcji trwałego inwalidztwa:

$$r_{AI}(t) = \begin{cases} r & dla \quad 0 \le t \le n \\ 0 & dla \quad t > n \end{cases},$$

– świadczenie z tytułu dożycia w ubezpieczeniu UD lub UŻD:

$$d_H(t) = d_{AI}(t) = \begin{cases} d & dla \quad t = n \\ 0 & dla \quad t \neq n \end{cases},$$

– jednorazowe świadczenie z tytułu opcji trwałego inwalidztwa:

$$c_{HAI}(t) = \begin{cases} \beta c & dla \quad 0 < t \le n \\ 0 & dla \quad t > n \end{cases},$$

– świadczenie z tytułu śmierci ubezpieczonego w ubezpieczeniu UŻ lub UŻD:

$$c_{HD}(t) = c_{AID}(t) = \begin{cases} c & dla \quad 0 < t \le n \\ 0 & dla \quad t > n \end{cases},$$

– świadczenie z tytułu śmierci ubezpieczonego wskutek nieszczęśliwego wypadku w ubezpieczeniu UŻ lub UŻD:

$$c_{HADI}(t) = \begin{cases} 2c & dla \quad 0 \le t \le n \\ 0 & dla \quad t > n \end{cases}.$$

Wszystkie strumienie płatności wynikające z umowy podstawowej i dodatkowej przedstawiono w uproszczonej formie w tabeli poniżej.

Tabela 3.2. Przepływy dla ubezpieczenia UŻ/UD z opcjami NW_AI + NW_ADI

Status polisy (opcja)	Składki	Renta od następstw NW	Świadczenie z tytułu dożycia końca ubezpieczenia	Jednorazowe świadczenie z tytułu NW	Jednorazowe świadczenie z tytułu śmierci	Jednorazowe świadczenie z tytułu śmierci wskutek NW
H	π	-	*d*	-	*c*	-
AI	-	*r*	*d*	β_c	*c*	-
ADI	-	-	-	-	-	*2c*

Źródło: opracowanie własne.

Wartość zaktualizowaną i aktuarialną strumieni płatności wynikających z zawartej złożonej umowy obejmującej dodatkowe opcje NW_ADI oraz NW_AI wyznacza się analogicznie jak w przypadku klasycznego ubezpieczenia, wykorzystując odpowiednio wzory (3.1-3.5) oraz (3.9-3.11). Wyznaczoną zaktualizowaną i aktuarialną wartość całkowitych przepływów pieniężnych dla ubezpieczenia z opcją NW_AI+NW_ADI przedstawiono w tabelach 3.3-3.4.

Tabela 3.3. Zaktualizowana wartość całkowitych przepływów pieniężnych dla ubezpieczenia UŻ/ UD z opcją NW_AI + NW_ADI

Rodzaje strumieni płatności	Wartość zaktualizowana na moment:
Wpłacone składki	$PV_H^{\Pi}(0,n) = \pi \int_0^n e^{-\delta s} I_H(s) ds$
Renta inwalidzka (NW_AI)	$PV_{AI}^{R}(0,n) = r \int_0^n e^{-\delta s} I_{AI}(s) ds$
Ustalony % sumy ubezpieczenia wypłacony z tytułu trwałego inwalidztwa (NW_AI)	$PV_{HAI}^{C}(0,n) = \beta c \int_0^n e^{-\delta s} dN_{HAI}(s)$
Dwukrotna suma ubezpieczenia wypłacona z tytułu śmierci wskutek NW (NW_ADI)	$PV_{HADI}^{C}(0,n) = 2c \int_0^n e^{-\delta s} dN_{HADI}(s)$
Jednorazowa suma ubezpieczenia wypłacona na wypadek śmierci	$PV_{HD}^{C}(0,n) = c \int_0^n e^{-\delta s} (dN_{HD}(s) + dN_{AID}(s))$
Jednorazowa wypłata z tytułu dożycia końca okresu ubezpieczenia	$PV_H^{D}(0,n) = de^{-\delta n}(I_H(n) + I_{AI}(n))$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.4. Wartość aktuarialna całkowitych przepływów pieniężnych dla ubezpieczenia UŻ/UD z opcją NW_AI + NW_ADI

Rodzaje strumieni płatności	Wartość aktuarialna
Wpłacone składki	$E(PV_H^{\Pi}(0,n) \mid X(0) = H) = \pi \int_0^n e^{-\delta s} \; {}_s p_x^{HH} ds$
Renta inwalidzka (NW_AI)	$E(PV_{AI}^{R}(0,n) \mid X(0) = H) = r \int_0^n e^{-\delta s} \; {}_s p_x^{HAI} ds$
Ustalony % sumy ubezpieczenia wypłacony z tytułu trwałego inwalidztwa (NW_AI)	$E(PV_{HAI}^{C}(0,n) \mid X(0) = H) = \beta c \int_0^n e^{-\delta s} \; {}_s p_x^{HH} \sigma(x+s) ds$
Dwukrotna suma ubezpieczenia wypłacona z tytułu inwalidztwa (NW_ADI)	$E(PV_{HADI}^{C}(0,n) \mid X(0) = H) = 2c \int_0^n e^{-\delta s} \; {}_s p_x^{HH} \sigma(x+s) ds$
Jednorazowa suma ubezpieczenia wypłacona na wypadek śmierci	$E\left(PV_{jD}^{C}(0,n) \mid X(0) = H\right) = c \int_0^n e^{-\delta s} \left({}_s p_x^{HH} \mu(x+s) + {}_s p_x^{HAI} \nu(x+s) \right) ds$ $j \in \{H, AI\}$
Jednorazowa wypłata z tytułu dożycia końca okresu ubezpieczenia (w zdrowiu lub chorobie)	$E(PV_j^{D}(0,n) \mid X(0) = H) = de^{-\delta n} \left({}_n p_x^{HH} + {}_n p_x^{HAI} \right)$ $j \in \{H, AI\}$

Źródło: opracowanie własne.

Przystępując do wyceny przyszłych przepływów pieniężnych, czyli mających miejsce od chwili wynikających z ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi, należy również dokonać ich dyskontowania na dowolny moment trwania ubezpieczenia, jednak konieczne jest uwzględnienie procesu aktywizacji opcji. Zgodnie z przedstawionym w rozdziale drugim modelem probabilistycznym ubezpieczenia podstawowego z wykupionymi opcjami dodatkowymi NW_ADI i NW_AI jest to czterostanowy model Markowa (semi-Markowa), w którym tylko dwa stany nie są pochłaniające. Zatem w rozpatrywanym przykładzie w dowolnym momencie trwania ubezpieczenia aktywna może być jedna z dwóch opcji: $S \in \{H, NW\_AI\}$, co oznacza, że proces aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t \in T}$ może mieć status: *H* lub *NW_AI* i należy ten fakt uwzględnić przy wycenie przyszłych przepływów pieniężnych, co przedstawiono w tabeli 3.5.

Tabela 3.5. Wartość aktuarialna przyszłych przepływów pieniężnych dla ubezpieczenia UŻ/UD z opcją NW_AI + NW_ADI

Rodzaje strumieni płatności	Wartość aktuarialna
Wpłacone składki	$E\left(PV^{\Pi}_{t,H}(t,n)\mid X(t)=H\right)=\pi\int_t^n e^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p^{HH}_{x+t}ds$ $E\left(PV^{\Pi}_{t,H}(\mathrm{t},n)\mid X(t)=NW\_AI\right)=0$
Renta inwalidzka (NW_AI)	$E\left(PV^{\mathrm{R}}_{t,AI}(t,n)\mid X(t)=H\right)=r\int_t^n e^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p^{HAI}_{x+t}ds$ $E\left(PV^{\mathrm{R}}_{t,AI}(t,n)\mid X(t)=NW\_AI\right)=r\int_t^n e^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p^{AIAI}_{x+t}ds$
Ustalony % sumy ubezpieczenia wypłacony z tytułu trwałego inwalidztwa (NW_AI)	$E\left(PV^{C}_{t,HAI}(\mathrm{t},n)\mid X(t)=H\right)=\beta c\int_t^n e^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p^{HH}_{x+t}\sigma(x+s)ds$ $E\left(PV^{C}_{t,HAI}(\mathrm{t},n)\mid X(t)=NW\_AI\right)=0$
Dwukrotna suma ubezpieczenia wypłacona z tytułu inwalidztwa (NW_ADI)	$E\left(PV^{C}_{t,HADI}(\mathrm{t},n)\mid X(t)=H\right)=2c\int_t^n e^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p^{HH}_{x+t}\sigma(x+s)ds$ $E\left(PV^{C}_{t,HADI}(\mathrm{t},n)\mid X(t)=NW\_AI\right)=0$
Jednorazowa suma ubezpieczenia wypłacona na wypadek śmierci	$E\left(PV^{\mathrm{C}}_{t,HD}(t,n)\mid X(t)=H\right)=$ $c\int_t^n e^{-\delta(s-t)}\left({}_{s-t}p^{HH}_{x+t}\mu(x+s)+{}_{s-t}p^{HAI}_{x+t}\nu(x+s)\right)ds$ $E\left(PV^{\mathrm{C}}_{t,HD}(t,n)\mid X(t)=NW_{AI}\right)=$ $c\int_t^n e^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p^{HAI}_{x+t}\nu(x+s)ds$
Jednorazowa wypłata z tytułu dożycia końca okresu ubezpieczenia (w zdrowiu lub chorobie)	$E(PV^{D}_{t,H}(t,n)\mid X(t)=H)=de^{-\delta(n-t)}\left({}_{n-t}p^{HH}_{x+t}+{}_{n-t}p^{HAI}_{x+t}\right)$ $E(PV^{D}_{t,ADI}(t,n)\mid X(t)=NW\_AI)=de^{-\delta(n-t)}{}_{n-t}p^{AIAI}_{x+t}$ $j\in\{H,AI\}$

Źródło: opracowanie własne.

4. Proces zagregowanej wypłaty

4.1. Podstawowe charakterystyki rozkładu

W analizie aktuarialnej kalkulacje oparte są na ocenie szkodowości danego typu ubezpieczenia. Informację o szkodowości złożonego ubezpieczenia, jakim jest ubezpieczenie na życie i dożycie powiązane z opcjami dodatkowymi, daje proces zagregowanej wypłaty, który obejmuje wszystkie świadczenia wynikające z zawartej umowy. Oceniając strumienie płatności świadczeń w momencie *t* trwania umowy, cały okres do tego momentu traktujemy jako przeszłość, zaś czas od tego momentu jako przyszłość. W zależności od analizowanego okresu czasu wyróżnia się skumulowane świadczenia do chwili *t* oraz skumulowane przyszłe świadczenia.

Definicja (Norberg 1990)

Proces skumulowanych roszczeń (świadczeń) wypłaconych w okresie czasu $\mathcal{T}$ *nazywany również procesem zagregowanej wypłaty* $\{W(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$*, oznaczono, a jego zaktualizowana wartość na moment to:*

$$PV_t^W(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)} dW(\tau).$$

Wyceny strumienia skumulowanych świadczeń dokonuje się poprzez odpowiednie złożenie i wycenę poszczególnych strumieni finansowych związanych z zawartą umową ubezpieczenia opisanych w rozdziale 3. Dla ujednolicenia analizy i zachowania ogólności modelu do wyceny łącznego strumienia świadczeń wykorzystana jest całka Riemanna-Stieltjesa obejmująca przypadek ciągłych i dyskretnych przepływów. W związku z tym zaktualizowana wartość łącznych świadczeń związanych z ubezpieczeniem złożonym wyrażona jest następującym wzorem:

$$\begin{aligned} PV_t^W(\mathcal{T}) = & \underbrace{\sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}d\Big(R_j(\tau)+D_j(\tau)\Big)}_{\text{świadczenia związane z aktywną opcją}} \\ & + \underbrace{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}c_{jk}(\tau)dN_{jk}(t)}_{\text{świadczenia wynikające ze zmiany aktywnej opcji polisy.}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Równoważna postać wzoru (4.1) jest następująca:

$$PV_t^W(\mathcal{T}) =$$
$$\sum_{j\in S}\left(\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}dW_j(\tau) \;+\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}c_{jk}(\tau)dN_{jk}(\tau)\right),$$

gdzie $\{W_j(t)\}_{t\in T}$ jest procesem uwzględniającym wszystkie świadczenia związane z aktywną opcją polisy.

Z punktu widzenia analizy aktuarialnej ubezpieczeń na życie interesujące są następujące charakterystyki funkcyjne rozkładu procesu:

– wartość oczekiwana,
– wariancja,
– odchylenie standardowe,
– skośność,
– kurtoza.

Wartość oczekiwana daje oszacowanie wartości skumulowanych świadczeń, miary rozproszenia stanowią informację o ryzyku z nim związanym, natomiast miary skośności i koncentracji wskazują na asymetrię i spłaszczenie rozkładu.

Do wyznaczenia wartości oczekiwanej skumulowanych świadczeń wystarczy znajomość momentów zwykłych pierwszego rzędu poszczególnych strumieni płatności $\{R_j(t)\}_{t\in T}$, $\{D_j(t)\}_{t\in T}$, oraz $\{C_{jk}(t)\}_{t\in T}$, które opisują wzory (3.9-3.13). Podstawiając je do wzoru na wartość oczekiwaną sumy zależnych zmiennych losowych, otrzymuje się wartość oczekiwaną skumulowanych świadczeń:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(PV_t^W(\mathcal{T})|\sigma(\mathsf{I}(T>t), 0\le t\le n)\wedge X(t)=i)\\
&=\sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\;{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}d\left(R_j(\tau)+D_j(\tau)\right)+\\
&+\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}c_{jk}(\tau)\;{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Wariancję skumulowanych świadczeń i tym samym odchylenie standardowe wyznacza się również jako sumę zależnych zmiennych losowych, otrzymując:

$$\mathrm{Var}(PV_t^W(\mathcal{T})|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0\le t\le n)\wedge X(t)=i) = \tag{4.3}$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j\in S}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\;{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}d\left(R_j(\tau)+D_j(\tau)\right)\middle|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0\le t\le n)\wedge X(t)=i\right)+$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}c_{jk}(\tau)\;{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau\middle|\sigma(\mathrm{I}(T>t), 0\le t\le n)\wedge X(t)=i\right)$$

Do wyznaczenia innych charakterystyk funkcyjnych, takich jak skośność i kurtoza, potrzebna jest znajomość warunkowych momentów zwykłych i centralnych wyższych rzędów, odpowiednio trzeciego i czwartego. Zgodnie z definicją q-ty warunkowy moment zwykły skumulowanych świadczeń wypłaconych w dowolnym okresie czasu $\mathcal{T}$ wyraża się wzorem:

$$m_q^i(\mathcal{T}) = E((PV_t^W(\mathcal{T}))^q | \sigma(I(T > t), 0 \leq t \leq n) \wedge X(t) = i)$$

oraz moment centralny to odpowiednio:

$$\mu_q^i(\mathcal{T}) = E\left(\left(PV_t^W(\mathcal{T}) - E\left(PV_t^W(\mathcal{T})\right)\right)^q \middle| \sigma(I(T > t), 0 \leq t \leq n) \wedge X(t)\right.$$

Przyjmując $\mathcal{T} = (t, n]$, wyznaczone momenty oznaczono odpowiednio jako $m_q^i(\mathrm{t})$ oraz $\mu_q^i(\mathrm{t})$ i dotyczą one przyszłych skumulowanych świadczeń.

W pracy Norberga (1995b) przedstawione jest równanie różniczkowe momentów zwykłych zaktualizowanych przepływów pieniężnych. Adaptując wyniki i uwzględniając w tym równaniu zamiast procesu łącznych przepływów pieniężnych proces skumulowanych świadczeń, uzyskano następujące równanie różniczkowe momentów zwykłych zaktualizowanej wartości skumulowanych przyszłych świadczeń:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_q^i(\mathrm{t}) = \\ &\left(q\delta + \mu_i(t)\right) m_q^i(\mathrm{t}) - q\left(c_i(t) + c_i(t)\right) m_{q-1}^i(\mathrm{t}) \\ &- \sum_{k \neq i} \mu_{ik}(t) \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} c_{ik}^r(t) m_{q-r}^k(\mathrm{t}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Natomiast momenty centralne stopnia $q > 1$ wyznacza się na podstawie momentów zwykłych według następującej zależności (Bilingsley 1987):

$$\mu_q^i(\mathrm{t}) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} (-1)^{q-r} m_r^i(t) \left(m_1^i(\mathrm{t})\right)^{q-r}. \tag{4.5}$$

Przedstawione równania (4.4) i (4.5) wykorzystuje się do wyznaczenia momentów zwykłych i centralnych zaktualizowanej wartości skumulowanych przyszłych świadczeń (Feller 1980), na podstawie których wyznacza się następnie wariancję (σ^2) jako drugi moment centralny i odchylenie standardowe (σ), natomiast współczynnik skośności i kurtoza dane są następującymi wzorami:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3^i(t)}{\sigma^3}, \gamma_2 = \frac{\mu_4^i(t)}{\sigma^4} - 3.$$

4.2. Rozkład skumulowanych świadczeń

Dla kompletnego scharakteryzowania procesu w kolejnym etapie zbadano jego rozkład. Problem rozkładu przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach podejmowało wielu autorów (Parker 1993, Hesselager, Norberg 1996, Norberg 1996, Waters 1998, Haberman, Pitacco 1999, Ramlau-Hansen 2003). Adaptując uzyskane przez nich wyniki, określono rozkład skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu złożonym, jakim jest ubezpieczenie na życie i dożycie z opcjami dodatkowymi. W rozdziale tym określono więc rozkład przyszłych skumulowanych świadczeń, których dystrybuanta zgodnie z definicją określona jest następująco:

$$\begin{aligned} &F_{W,t}^{i}(u) = \mathbb{P}_i^W(t,u) = \\ &\quad \mathbb{P}[PV_t^W(t,n) \le u | \sigma(\mathbb{I}(T > t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i] = \\ &\quad \mathbb{P}\left[\int_t^n e^{-\delta(\tau - t)} dW(\tau) \le u | \sigma(\mathbb{I}(T > t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i\right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Gdy podstawimy w powyższym wzorze zaktualizowaną wartość skumulowanych świadczeń określoną wzorem (4.1), powyższy wzór przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i^W(t,u) = \mathbb{P}[PV_t^W(t,n) \le u | \sigma(\mathbb{I}(T > t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i] = \\ &\mathbb{P}\left[\sum_{j \in S}\left(\int_t^n e^{-\delta\tau} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} dW_j(\tau) + \sum_{k \ne j} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\tau} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau)\right)\right. \\ &\left. \le u e^{-\delta t} | \sigma(\mathbb{I}(T > t), 0 \le t \le n) \wedge X(t) = i\right]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

To, jakie świadczenia ubezpieczyciel wypłaci w przyszłości, determinuje określona realizacja procesu aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t \in T}$. Wiadomo, że mogą wystąpić dwie sytuacje: w dowolnym momencie $s > t$ nastąpi zmiana aktywnej opcji polisy ubezpieczeniowej, co oznacza przejście procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$ do innego stanu, lub aktywna opcja nie ulegnie zmianie, co oznacza, że proces pozostanie w stanie i do końca trwania ubezpieczenia. Zatem stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i^W(t,u) = \\
&\underbrace{\sum_{j\neq i}\int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{ii}\mu_{ij}(s)ds}_{\substack{prawdopodobieństwo\ zmiany\\ aktywnej\ opcji\ w\ chwili\ s}} \cdot\ \mathbb{P}\left[\int_t^s e^{-\delta\tau}dW_i(\tau) + e^{-\delta s}c_{ij}(s)\right. \\
&\left. + \int_s^n e^{-\delta\tau}dW(\tau) \le ue^{-\delta t}|X(s) = j\right] + \\
&\underbrace{{}_{n-t}p_{x+t}^{ii}}_{\substack{prawdopodobieństwo\\ pozostania}} \cdot\ \mathbb{I}\left[\int_t^n e^{-\delta\tau}dW_i(\tau) \le ue^{-\delta t}\right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

W drugim składniku sumy powyższego wzoru wyrażenie ${}_{n-t}p_{x+t}^{ii}$ określa prawdopodobieństwo utrzymania aktywnej *i-tej* opcji ubezpieczenia do końca jego trwania. W tym przypadku przyszłe świadczenia związane są tylko z aktywną i-tą opcją ubezpieczenia. Natomiast w pierwszym składniku sumy wyrażenie ${}_{s-t}p_{x+t}^{ii}\mu_{ij}(s)$ określa prawdopodobieństwo pozostania procesu aktywizacji opcji w stanie *i* do chwili *s* oraz przejście do stanu *j* w czasie $[s, s + ds)$. W tym przypadku przyszłe przepływy pieniężne do chwili *s* związane są z aktywną opcją (*i*), następnie w momencie *s* wypłacane jest świadczenie jednorazowe w wysokości $c_{ij}(s)$ wynikające ze zmiany statusu polisy i dalsze płatności (po czasie *s*) wynikają z dowolnej aktywizacji opcji w przyszłości.

Zatem dokonując dalszych przekształceń algebraicznych tego czynnika, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\int_t^s e^{-\delta\tau}dW_i(\tau) + e^{-\delta s}c_{ij}(s) + \int_s^n e^{-\delta\tau}dW(\tau) \le ue^{-\delta t}|X(s) = j\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\int_s^n e^{-\delta(\tau-s)}dW(\tau) \le ue^{-\delta(t-s)} - c_{ij}(s) - \int_t^s e^{-\delta(\tau-s)}dW_i(\tau)\,|X(s) = j\right] \\
&= \mathbb{P}_j^W\left(s, ue^{-\delta(t-s)} - c_{ij}(s) - \int_t^s e^{-\delta(\tau-s)}dW_i(\tau)\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Uwzględniając powyższe przekształcenia, wzór (4.7) wyrażający dystrybuantę skumulowanych przyszłych świadczeń przyjmuje teraz postać:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i^W(t,u) = \\
&\sum_{j\neq i}\int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{ii}\mu_{ij}(s)\mathbb{P}_j^W\left(s, ue^{-\delta(t-s)} - c_{ij}(s) - \int_t^s e^{-\delta(\tau-s)}dW_i(\tau)\right)ds + \\
&{}_{n-t}p_{x+t}^{ii}\mathbb{I}\left[\int_t^n e^{-\delta\tau}dW_i(\tau) \le ue^{-\delta t}\right].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Na podstawie powyższego wzoru można wyznaczyć dystrybuantę skumulowanych przyszłych świadczeń, ale jedynie dla ustalonego momentu *t*. W celu wyznaczenia rozkładu jako funkcji czasu należy znaleźć równanie różniczkowe lub rekurencyjne będące podstawą wyznaczania rozkładu skumulowanych świadczeń. Niestety równania (4.9) nie można zróżniczkować po *t*, ponieważ istnieje podwójna zależność od czasu. Zatem aby uwolnić się od tej zależności, należy dokonać dalszych przekształceń polegających na pomnożeniu obu stron równania przez ${}_tp_x^{ii}$ oraz dokonaniu następującego podstawienia:

$$u \cong e^{\delta \mathrm{t}}\left(u - \int_0^t e^{-\delta\tau} dW_i(\tau)\right).$$

Wówczas równanie (4.9) przyjmuje postać:

$$\begin{gathered}{}_tp_x^{ii}\mathbb{P}_i^W\left(t, e^{\delta t}\left(u - \int_0^t e^{-\delta\tau} dW_i(\tau)\right)\right) = \\ \sum_{j\neq i}\int_t^n {}_sp_x^{ii}\mu_{ij}(s)\mathbb{P}_j^W\left(s, e^{\delta s}u - \int_0^s e^{-\delta(\tau-s)} dW_i(\tau) - c_{ij}(s)\right) ds + \\ {}_np_x^{ii}\mathbb{I}\left[\int_0^n e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) \le u\right].\end{gathered} \tag{4.11}$$

Następnie po podstawieniu $\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) = \mathbb{P}_i^W\left(t, e^{\delta t}\left(u - \int_0^t e^{-\delta\tau} dW_i(\tau)\right)\right)$ równoważna postać powyższego równania jest następująca:

$$\begin{gathered}{}_tp_x^{ii}\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) = \\ \sum_{j\neq i}\int_t^n {}_sp_x^{ii}\mu_{ij}(s)\widetilde{\mathbb{P}}_j^W\left(s, u + \int_0^s e^{-\delta\tau} dW_j(\tau) - \int_0^s e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) - e^{-\delta s}c_{ij}(s)\right) \\ + {}_np_x^{ii}\mathbb{I}\left[\int_0^n e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) \le u\right].\end{gathered} \tag{4.12}$$

Z równań Kołmogorowa omówionych i rozwiązanych w rozdziale 2 wiadomo, że ${}_tp_x^{ii} = exp\left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau\right)$. Zatem obliczając pochodną zarówno lewej, jak i prawej strony powyższego równania, mamy:

$$L = \left({}_t p_x^{ii} \widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) \right)' =$$

$$\left(exp\left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau \right) \right)' \cdot \widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) + exp\left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau \right) \cdot \left(\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) \right)' =$$

$$exp\left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau \right) \widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) \left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau \right)' + exp\left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau \right) \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u)}{dt} =$$

$$exp\left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau \right) \left(-\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) \mu_i(\tau) + \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u)}{dt} \right)$$

oraz

$$\mathrm{P} =$$

$$\left({}_s p_x^{ii} \sum_{j \neq i} \int_t^n \mu_{ij}(s) \widetilde{\mathbb{P}}_j^W \left(s, u + \int_0^s e^{-\delta\tau} dW_j(\tau) - \int_0^s e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) - e^{-\delta s} c_{ij}(s) \right) \right)'$$

$$+ \left({}_n p_x^{ii} \mathbb{I} \left[\int_0^n e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) \leq u \right] \right)' =$$

$$-exp\left(-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau \right) \sum_{j \neq i} \int_t^n \mu_{ij}(s) \widetilde{\mathbb{P}}_j^W \left(s, u + \int_0^s e^{-\delta\tau} dW_j(\tau) - \int_0^s e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) \right.$$

$$\left. - e^{-\delta s} c_{ij}(s) \right).$$

Przyrównując obie strony i dokonując przekształceń algebraicznych, otrzymuje się równanie różniczkowe funkcji $\mathbb{P}_i^W(t,u)$(Olivieri, Pitacco 2009):

$$\begin{aligned} d\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) = {} & \\ & \widetilde{\mathbb{P}}_i^W(t,u) \mu_i(t) dt \\ & - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t) \widetilde{\mathbb{P}}_i^W \left(t, u + \int_0^t e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) - \int_0^t e^{-\delta\tau} dW_j(\tau) - e^{-\delta t} c_{jk}(t) \right) dt \end{aligned} \tag{4.13}$$

z warunkiem początkowym:

$$\widetilde{\mathbb{P}}_i^W(n,u) = \mathbb{I} \left\{ \int_0^n e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) \leq u \right\}.$$

Całka w równaniu (4.13) jest całką Riemanna-Stieltjesa i stanowi podstawę zbadania dystrybuanty rozkładu skumulowanych świadczeń wypłacanych z polis ubezpieczeniowych z opcjami dodatkowymi.

4.3. Proces skumulowanych świadczeń dla przykładowych polis z opcjami dodatkowymi

Rozkład procesu skumulowanych świadczeń stanowi kolejny etap oceny i wyceny dwóch omówionych polis ubezpieczenia z opcjami:

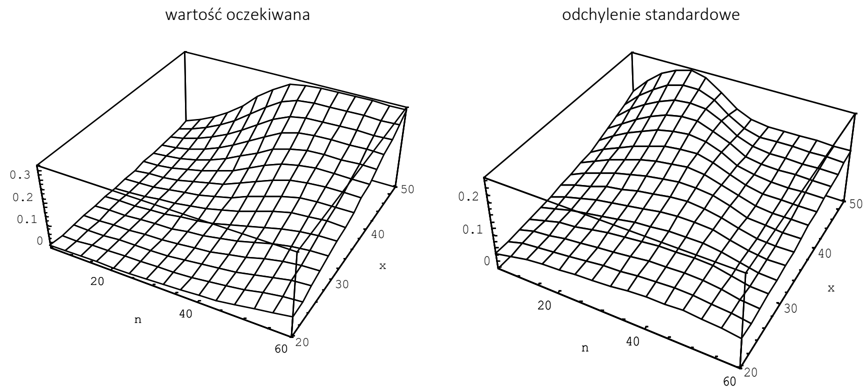
1. Tradycyjnego ubezpieczenia na życie (UŻ, UD, UŻD).
2. Podstawowego (UŻ, UD, UŻD) z opcją dodatkową powszechnie nazywaną nieszczęśliwym wypadkiem (NW) w tym przypadku uwzględniono opcje NW_ADI oraz NW_AI.

W pierwszym przypadku procesami reprezentującymi wielkości roszczeń są $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$, które zostały opisane i były analizowane w rozdziale 3.4. Złożenie tych procesów prowadzi do procesu skumulowanych przyszłych świadczeń, który zgodnie ze wzorem (4.1) i z uwzględnieniem strumieni płatności charakterystycznych dla omawianego tradycyjnego ubezpieczenia UŻ, UD i UŻD (tabela 3.1) przyjmuje następującą postać:

$$\underbrace{d \cdot e^{-\delta\cdot(n-t)} I_H(n)}_{\substack{\textit{świadczenie z tytułu} \\ \textit{dożycia}}} + \underbrace{c \int_t^n e^{-\delta\cdot(s-t)} dN_{HD}(s)}_{\textit{świadczenie z tytułu śmierci}} .$$

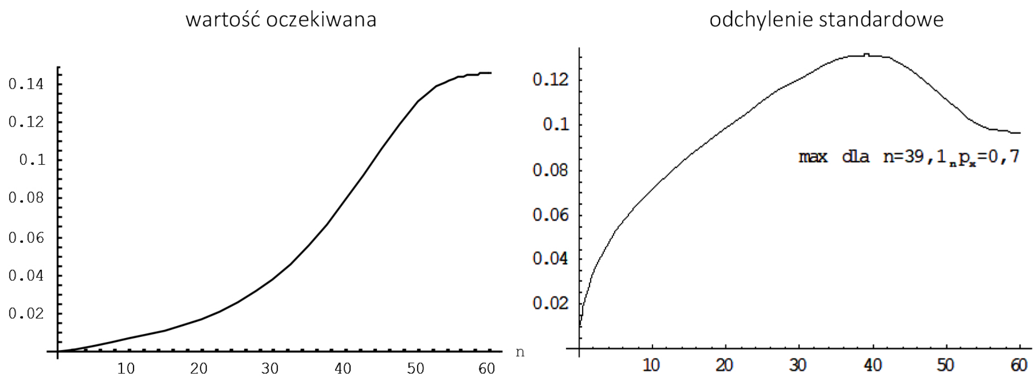
Analizę własności tego procesu i określenie jego rozkładu należy przeprowadzać w dwóch etapach. Pierwszy etap to zbadanie własności i rozkładu całkowitych skumulowanych świadczeń (nazywanych również całkowitą wypłatą) z uwzględnieniem wieku ubezpieczonego i długości okresu ubezpieczenia. Analiza ta jest dla ubezpieczyciela podstawą wyceny ubezpieczenia. Drugi etap to analiza własności procesu przyszłych skumulowanych świadczeń i wiąże się z koniecznością uwzględnienia procesu aktywizacji opcji w okresie trwania ubezpieczenia i dotyczy tylko umów ubezpieczenia z wykupionymi opcjami dodatkowymi.

W analizowanym przykładzie dotyczącym tradycyjnego ubezpieczenia bez opcji dodatkowych proces aktywizacji opcji nie ma miejsca, dlatego też przeprowadzono analizę własności procesu całkowitych skumulowanych świadczeń i określono jego rozkład. W ubezpieczeniach najczęściej używanymi charakterystykami funkcyjnymi są wartość oczekiwana i wariancja. Wykresy wyznaczonych przeciętnych całkowitych skumulowanych świadczeń i odchylenia standardowego, przyjmując sumę ubezpieczenia równą 1 *j.p.* dla ubezpieczenia UŻ, przedstawiono na rysunku 4.1.



Rysunek 4.1. Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ
Źródło: opracowanie własne.

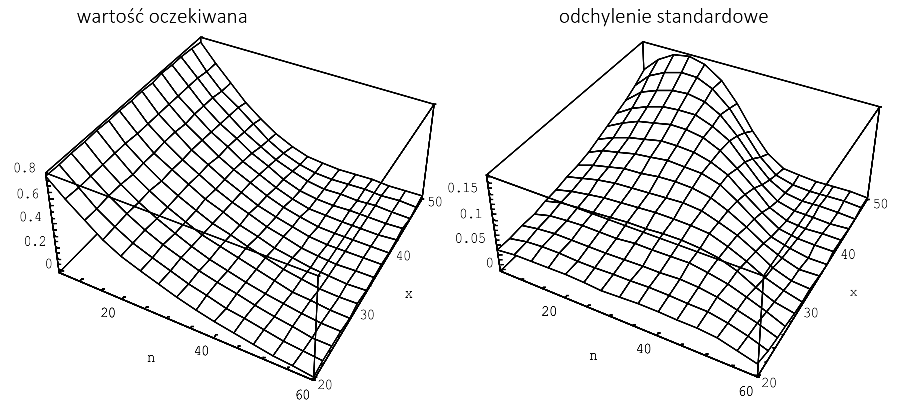
Przedstawione charakterystyki można dokładniej przeanalizować, rozpatrując umowę zawartą z ubezpieczonym w określonym wieku. Wybrane charakterystyki funkcyjne całkowitych skumulowanych świadczeń dla ubezpieczenia UŻ zawartego z 30-letnim mężczyzną przedstawione są na rysunku 4.2.



Rysunek 4.2. Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ zawartym z 30-latkiem
Źródło: opracowanie własne.

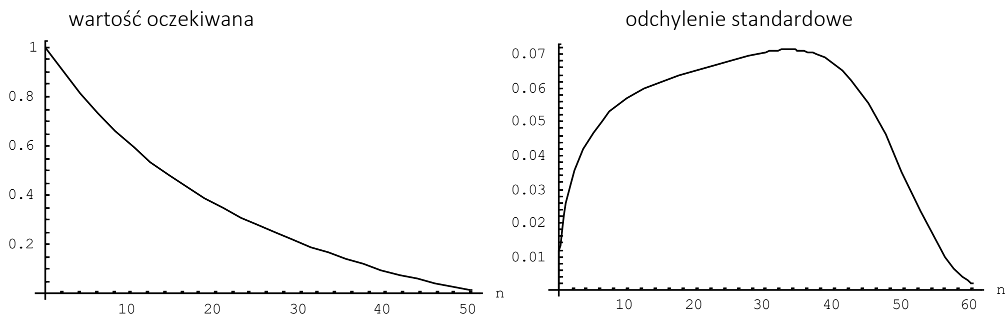
Wartość oczekiwana całkowitych skumulowanych świadczeń, jak można się było spodziewać, jest rosnącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia *n* dla każdego wieku wstępu. Natomiast jeżeli rozpatrujemy ją jako funkcję wieku osoby ubezpieczanej, to możemy zaobserwować, że dla wieloletnich kontraktów ubezpieczeniowych są to funkcje rosnące, z kolei dla małych wartości *n* jest to funkcja prawie stała. Dokładność oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń mierzy się za pomocą wielkości odchylenia standardowego. Rysunek 4.1b wskazuje, że dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej odchylenie standardowe rośnie od $n = 1$ do maksimum, które osiąga dla n, takiego, że ${}_np_x = {}_np_x^{HH} = 0{,}7$ i następnie maleje aż do $n = 60$. Analogicznie dla ustalonego n odchylenie standardowe jest funkcją rosnąco-malejącą zmiennej x, która osiąga maksimum dla x, spełniającego warunek: ${}_np_x = {}_np_x^{HH} = 0{,}7$, za wyjątkiem dużych wartości n, dla których $\forall x \; {}_np_x^{HH} > 0{,}7$ i wówczas mamy funkcję rosnącą.

Drugim rodzajem najprostszego ubezpieczenia jest tradycyjne ubezpieczenie na dożycie UD. Wykresy przeciętnej całkowitych skumulowanych świadczeń i odchylenia standardowego dla ubezpieczenia UD przedstawiono na rysunku 4.3 i rysunku 4.4 dla 30-letniego mężczyzny.



Rysunek 4.3. Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UD

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.4. Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UD 30-letniego mężczyzny

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku ubezpieczenia na dożycie UD wartość oczekiwana całkowitych skumulowanych świadczeń (pierwszy wykres) jest malejącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia n dla każdego wieku wstępu i jest to związane z malejącym prawdopodobieństwem, że wypłata świadczenia nastąpi. Wielkość ta jako funkcja wieku ubezpieczonego dla dowolnych wartości n jest funkcją stałą. O dokładności oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń mówi wielkość odchylenia standardowego. Drugi wykres na rysunku 4.3 wskazuje, że w ubezpieczeniu UD dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej odchylenie standardowe rośnie, osiągając maksimum w n_{max}, a następnie maleje aż do $n = 60$. Analogicznie dla ustalonego n odchylenie standardowe jest funkcją rosnąco-malejącą za wyjątkiem dużych wartości n, dla których jest funkcją malejącą. Przedstawione własności funkcji można przeanalizować dokładniej, rozpatrując umowę UD zawartą z mężczyzną w wieku 30 lat.

Mając określone podstawowe charakterystyki rozkładu, w dalszej części przykładu wyznaczono rozkład całkowitych skumulowanych świadczeń. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w przypadku takiego ubezpieczenia zgodnie z (4.10) określona jest następująco:

$$\mathbb{P}_H^W(0,u) = \int_0^n {}_s p_x^{HH} \mu_{HD}(s)\, \mathbb{P}_D^W\left(s, e^{\delta s}u - \int_0^s \frac{v(\tau)}{v(s)} d\mathcal{W}_H(\tau) - c_{HD}(s)\right) ds +$$

$$+ {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}\left[\int_0^n e^{-\delta\tau} d\mathcal{W}_H(\tau) \le u\right].$$

Uwzględniając strumienie płatności charakterystyczne dla ubezpieczenia UŻ, wzór ten przyjmuje postać:

$$\mathbb{P}_H^W(0,u) = \int_0^n {}_s p_x^{HH} \mu(x+s)\, \mathbb{P}_D^W\big(s, e^{\delta s}u - c_{HD}(s)\big) ds + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0].$$

Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_D^W\big(s, e^{\delta s}u - c_{HD}(s)\big)$ występujące w pierwszym składniku sumy zgodnie ze wzorem (4.9) można zapisać następująco:

$$\mathbb{P}\left(\int_s^n e^{-\delta(\tau - s)} dW(\tau) \le e^{\delta s}u - c_{HD}(s) | X(s) = D\right).$$

Oznacza to, że momentem śmierci ubezpieczonego jest chwila s zdefiniowana jako zmienna losowa. Niech więc T_x oznacza przyszły czas życia osoby w wieku x lat, wówczas otrzymujemy:

$$\mathbb{P}_H^W(0,u) =$$

$$\int_0^n {}_s p_x^{HH} \mu(x+s) \mathbb{P}\left(\int_s^n e^{-\delta(\tau-s)} dW(\tau) \le e^{\delta s} u - c_{HD}(s) | X(s) = D\right) ds$$

$$+ {}_n p_x^{HH} \mathbf{1}[u \ge 0] = \mathbb{P}\big(e^{\delta T_x} u - c_{HD}(T_x) \ge 0\big) + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0]$$

$$= \mathbb{P}\left(T_x \ge \underbrace{\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{c}{u}\right)}_{t_1}\right) + P(T_x > n) \cdot \mathbf{1}[u \ge 0]$$

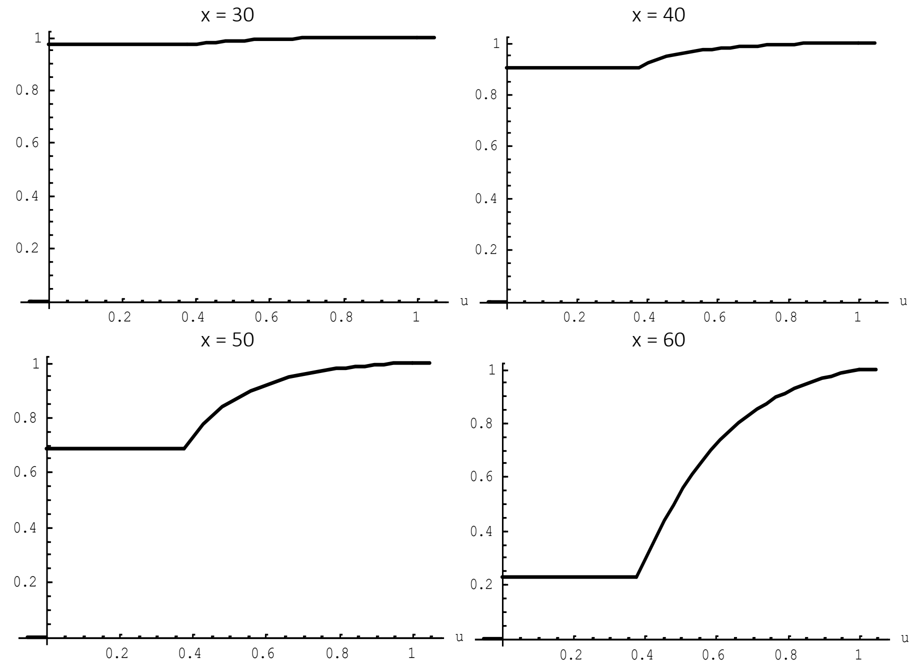
$$= {}_{t_1} p_x^{HH} + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0].$$

Korzystając z powyższego wzoru, otrzymuje się ostatecznie wzór dystrybuanty całkowitych skumulowanych świadczeń w tradycyjnym ubezpieczeniu UŻ:

$$F_{W,0}^H(u) = \mathbb{P}_H^W(0,u) = \begin{cases} 0 & dla \quad u < 0 \\ \mathbb{P}(T_x \ge n) = {}_n p_x^{HH} & dla \quad 0 \le u < ce^{-\delta n} \\ \mathbb{P}\left(T_x \ge \underbrace{\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{c}{u}\right)}_{t_1}\right) = {}_{t_1} p_x^{HH} & dla \quad ce^{-\delta n} \le u < c \\ 1 & dla \quad u \ge 0\ . \end{cases}$$

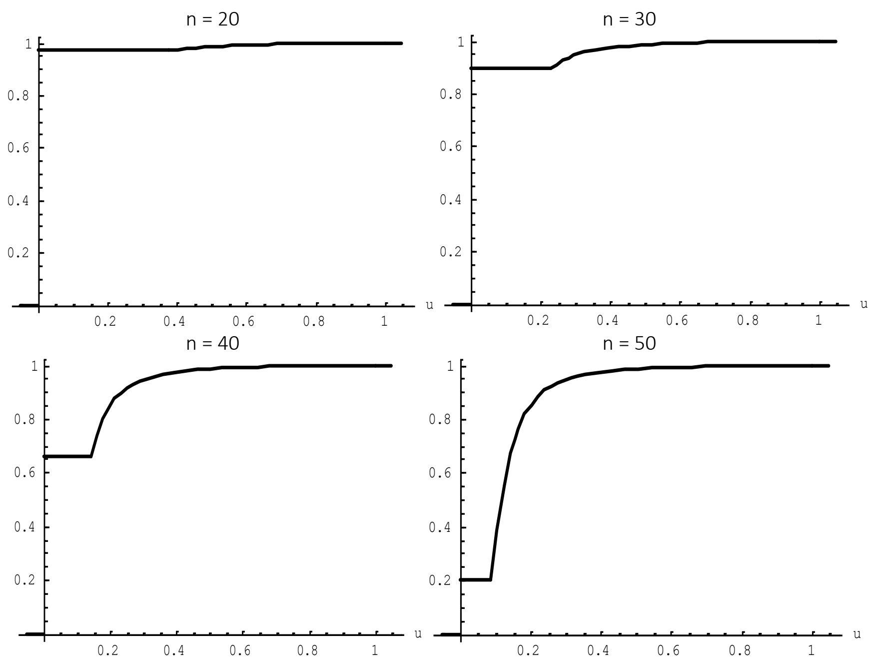
Dystrybuanta dana powyższym wzorem zależy od dwóch parametrów: wieku ubezpieczonego i okresu trwania ubezpieczenia. Na rysunku 4.5 przedstawiono wykresy dystrybuant skumulowanych świadczeń dla terminowego 20-letniego ubezpieczenia UŻ zawartego z osobą w wieku *x* lat. Natomiast dystrybuanty przedstawione na rysunku 4.6 to prezentacja graficzna dystrybuant skumulowanych świadczeń dla *n*-letniego ubezpieczenia UŻ zawartego z 30-letnim mężczyzną. Zatem w pierwszym przypadku przedstawiono zmiany rozkładu w zależności od wieku ubezpieczonego, w drugim zaś zilustrowano, jak okres ubezpieczenia wpływa na ten rozkład.

W analogiczny sposób można wyznaczyć dystrybuantę rozkładu skumulowanych całkowitych świadczeń w ubezpieczeniu na dożycie (UD) oraz na życie i dożycie (UŻD), uwzględniając charakterystyczne dla tych ubezpieczeń strumienie płatności.



Rysunek 4.5. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń ubezpieczenie UŻ w zależności od *x*

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.6. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń ubezpieczenie UŻ w zależności od *n*

Źródło: opracowanie własne.

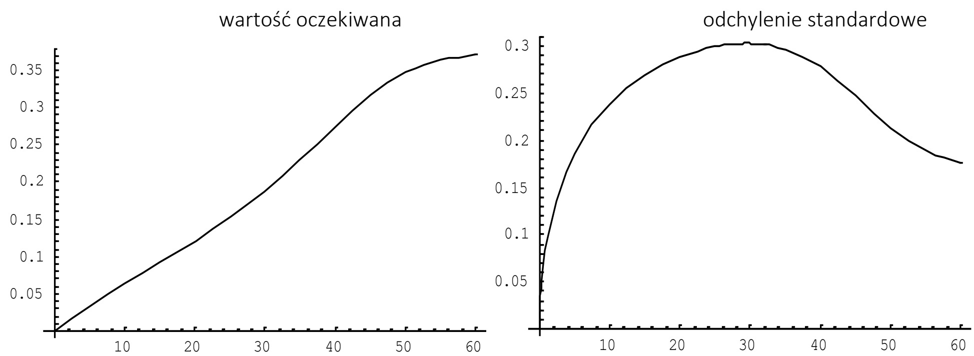
Natomiast analiza rozkładu skumulowanych świadczeń w przypadku ubezpieczenia złożonego, czyli ubezpieczenia z wykupioną opcją dodatkową NW_AI + NW_ADI, którego model probabilistyczny został przedstawiony w rozdziale 2.4, procesami reprezentującymi wielkości roszczeń w tego typu ubezpieczeniu są odpowiednio $\{D_j(t)\}$, $\{C_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$, które zostały opisane i przedstawione w tabeli 3.3. Na tej podstawie określono funkcję skumulowanych świadczeń następującej postaci:

$$PV_t^W(t,n) =$$

$$\underbrace{d\cdot e^{-\delta(n-t)}\big(I_H(n)+I_{AI}(n)\big)}_{\substack{\text{świadczenie z tytułu dożycia}\\ \text{końca okresu ubezpieczenia}}} + \underbrace{c\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\big(dN_{AID}(\tau)+dN_{HD}(\tau)\big)}_{\text{świadczenie z tytułu śmierci}} +$$

$$\underbrace{r\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}I_{AI}(\tau)d\tau + \beta c\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}dN_{HAI}(\tau) + 2c\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}dN_{HADI}(\tau)}_{\text{świadczenia z tytułu opcji dodatkowych}}\;.$$

Analizę własności rozkładu procesu skumulowanych świadczeń w przypadku ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi przeprowadza się w dwóch etapach obejmujących proces: całkowitych skumulowanych świadczeń dokonanych w czasie $[0,n]$ oraz przyszłych skumulowanych świadczeń dokonanych po czasie. Zatem pierwszy etap to zbadanie rozkładu całkowitych skumulowanych świadczeń stanowiących dla ubezpieczyciela podstawę wyceny ubezpieczenia. Wówczas w powyższym wzorze przyjmuje się $t=0$ i podstawiając wynik do wzorów (4.2-4.3), wyznaczono podstawowe charakterystyki rozkładu: wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe procesu skumulowanych świadczeń. Wykresy tych charakterystyk dla ubezpieczenia UŻ z opcją NW_AI + NW_ADI zawartego z 30-letnim mężczyzną przedstawiono na rysunku 4.7.



Rysunek 4.7. Wartość oczekiwana, drugi moment, wariancja i odchylenie standardowe całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW dla 30-latka jako funkcje *n*

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku ubezpieczenia na życie z opcją NW_AI + NW_ADI zarówno wartość oczekiwana, jak i odchylenie standardowe wykazują takie same własności jak w przypadku tradycyjnego ubezpieczenia UŻ bez opcji dodatkowych. Wartość oczekiwana całkowitych skumulowanych świadczeń jest rosnącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia n dla każdego wieku wstępu. O dokładności oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń mówi wielkość odchylenia standardowego. Jego wykres wskazuje, że dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej odchylenie standardowej rośnie do pewnego punktu n_{max} spełniającego warunek ${}_{n_{max}}p_x = 0{,}7$: i dalej maleje aż do $n = 60$.

W przeciwieństwie do tradycyjnych umów ubezpieczenia w przypadku umów ubezpieczenia złożonego analiza rozkładu skumulowanych świadczeń obejmuje również drugi etap dotyczący procesu skumulowanych przyszłych świadczeń. Etap ten obejmuje więc badanie rozkładu już w okresie trwania ubezpieczenia z uwzględnianiem ewentualnych niedoszacowań w przyszłych płatnościach, w związku ze zmieniającymi się w okresie trwania ubezpieczenia aktywnymi opcjami tego ubezpieczenia. Ubezpieczyciel, dokonując wyceny ubezpieczenia w momencie jego zawierania (w chwili $t = 0$), nie uwzględnia tych zmian i w ten sposób mogą powstać ewentualne niedoszacowania przyszłych przepływów pieniężnych. Dlatego też ubezpieczyciel powinien dokonać analizy procesu skumulowanych świadczeń dla dowolnego momentu $t \in [0, n]$ trwania ubezpieczenia, z uwzględnieniem procesu aktywizacji opcji ubezpieczenia. Analizę tę można przeprowadzić dla ustalonego momentu w analogiczny sposób jak w przypadku całkowitych skumulowanych świadczeń. Można również oprzeć ją na rozwiązywaniu odpowiednich równań różniczkowych. Momenty zwykłe skumulowanych świadczeń dla dowolnego t wyznacza się, rozwiązując odpowiedni układ równań różniczkowych (4.4). W przypadku ubezpieczenia z opcją NW_AI + ADI układ ten jest bardziej złożony:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} m_H^{(q)}(t) = [q\delta + \mu_{HS}(t) + \mu_{HD}(t)] \cdot m_H^{(q)}(t) - \\ \qquad -q \cdot (c_H(t) + d_H(t)) \cdot m_H^{(q-1)}(t) - \mu_{HS}(t) \displaystyle\sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} c_{HS}^r(t) \cdot m_S^{(q-r)}(t) \\ \dfrac{d}{dt} m_S^{(q)}(t) = [q\delta + \mu_{SD}(t)] \cdot m_S^{(q)}(t) - q \cdot c_S(t) \cdot m_S^{(q-1)}(t). \end{cases}$$

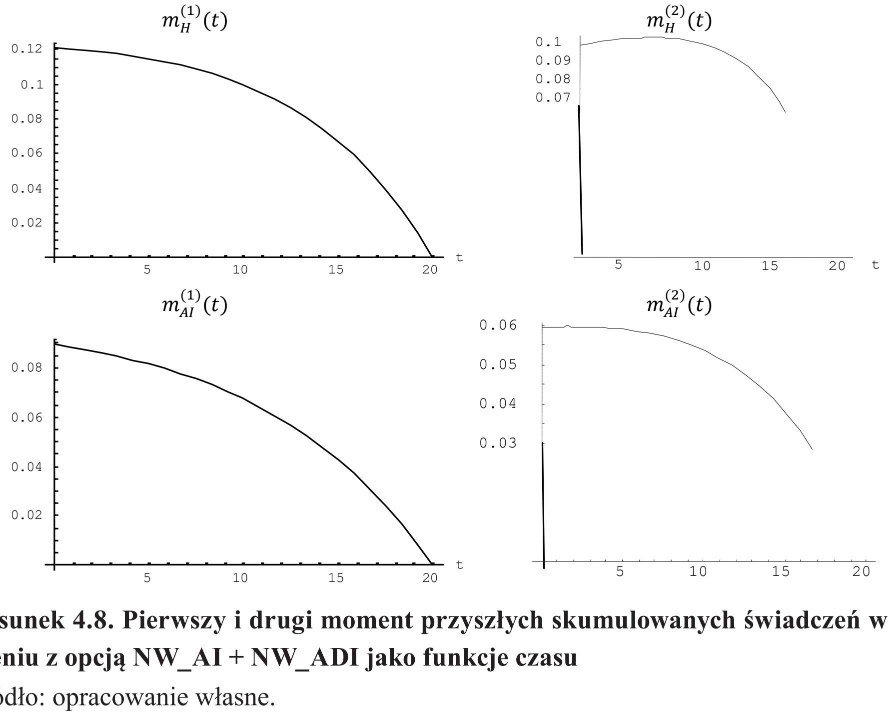
Ostateczna postać układu równań, jaki należy rozwiązać, zależy od strumieni płatności związanych z ubezpieczeniem podstawowym i dodatkowym. Jeśli rozpatrujemy ubezpieczenie podstawowe na życie UŻ z opcją NW_AI + NW_ADI, to układ ten przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} m_q^H(\mathrm{t}) = [q\delta + \mu_{HAI}(t) + \mu_{HD}(t)] \cdot m_H^{(q)}(t) \\ \qquad -2c\mu_{HADI}(t) \displaystyle\sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} m_{ADI}^{(q-r)}(t) \\ \dfrac{d}{dt} m_{AI}^{(q)}(t) = [q\delta + \mu_{AID}(t)] \cdot m_{AI}^{(q)}(t). \end{cases}$$

Natomiast w przypadku ubezpieczenia na dożycie UD wraz z opcją NW_AI + NW_ADI należy rozwiązać następujący układ dwóch równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} m_q^H(\mathrm{t}) = [q\delta + \mu_{HAI}(t) + \mu_{HD}(t)] m_H^{(q)}(t) \\ \qquad -cqm_H^{(q-1)}(t) - 2c\mu_{HADI}(t) \displaystyle\sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} m_{ADI}^{(q-r)}(t) \\ \dfrac{d}{dt} m_{AI}^{(q)}(t) = [q\delta + \mu_{AID}(t)] \cdot m_{AI}^{(q)}(t)\ . \end{cases}$$

Traktując momenty zwykłe przyszłych (po czasie *t*) skumulowanych świadczeń jako funkcje czasu *t* i uwzględniając proces aktywizacji opcji, wyznaczono pierwszy i drugi moment warunkowy. Na rysunku 4.8 przedstawiono pierwszy i drugi warunkowy moment zwykły przyszłych przepływów pieniężnych związanych z możliwymi stanami oznaczonymi *H* i *S*.



Rysunek 4.8. Pierwszy i drugi moment przyszłych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu z opcją NW_AI + NW_ADI jako funkcje czasu

Źródło: opracowanie własne.

Aktywne opcje w przypadku ubezpieczenia złożonego z opcją NW zmieniają się w okresie trwania ubezpieczenia i jeśli uaktywnia się opcja dodatkowa, wówczas zmienia się rząd uzyskanych wielkości, które ubezpieczyciel powinien uwzględniać w okresie trwania ubezpieczenia. Mając obliczone wartości wybranych charakterystyk funkcyjnych procesu całkowitych skumulowanych świadczeń, określono jego rozkład dla n-letniego ubezpieczenia UŻ z opcją NW. W przypadku tego ubezpieczenia zgodnie ze wzorem (4.9) dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń dana jest wzorem:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_H^W(0,u) \\
&= \int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HAI}(s)\,\mathbb{P}_{AI}^W\left(s, e^{\delta s}u - \int_0^s e^{-\delta(t-\tau)}dW_H(\tau) - c_{HAI}(s)\right)ds \\
&+ \int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HADI}(s)\,\mathbb{P}_{ADI}^W\left(s, e^{\delta s}u - \int_0^s e^{-\delta(t-\tau)}dW_H(\tau) - c_{HADI}(s)\right)ds \\
&+ \int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\cdot\mathbb{P}_D^W\left(s, e^{\delta s}u - \int_0^s e^{-\delta(t-\tau)}dW_H(\tau) - c_{HD}(s)\right)ds \\
&+ {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[\int_0^n v(\tau)dW_H(\tau) \le u\right].
\end{aligned}
$$

Po uwzględnieniu strumieni płatności związanych z ubezpieczeniem UŻ z opcją NW (tabela 3.4), powyższy wzór przyjmuje postać:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_H^W(0,u) = \\
&\int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HADI}(s)\,\mathbb{P}_{ADI}^W\left(s, e^{\delta s}u - 2c\right)ds + \\
&\int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\,\mathbb{P}_D^W\left(s, e^{\delta s}u - c\right)ds + {}_np_x^{HH}\mathbf{1}[u \ge 0].
\end{aligned}
$$

Prawdopodobieństwa $\mathbb{P}_{ADI}^W\left(s, e^{\delta s}u - 2c\right)$, $\mathbb{P}_{AI}^W\left(s, e^{\delta s}u - \beta c\right)$ oraz $\mathbb{P}_D^W\left(s, e^{\delta s}u - c\right)$ w tym przykładzie są odpowiednio równe:

$$\mathbb{P}_{ADI}^W\left(s, e^{\delta s}u - 2c\right) = P\left(\int_s^n e^{-\delta(t-\tau)}dW(\tau) \le e^{\delta s}u - 2c | X(s) = ADI\right),$$

$$\mathbb{P}_D^W\left(s, e^{\delta s}u - c\right) = P\left(\int_s^n e^{-\delta(t-\tau)}dW(\tau) \le e^{\delta s}u - c | X(s) = D\right).$$

W powyższych wzorach moment s jest odpowiednio momentem zachorowania lub śmierci ubezpieczonego. Moment ten jest zmienną losową. Niech więc T_x oznacza przyszły czas życia osoby w wieku x lat oraz T_x^H odpowiednio przyszły czas życia w zdrowiu osoby w wieku x lat. Wówczas dystrybuantę tę wyznacza się następująco:

$$\mathbb{P}_H^W(0,u) =$$

$$\int_0^n {}_s p_x^{HH} \mu_{HS}(s)\, P\left(\int_s^n e^{-\delta(t-\tau)} dW(\tau) \leq e^{\delta s} u - 2c | X(s) = ADI\right) ds$$

$$+ \int_0^n {}_s p_x^{HH} \mu_{HD}(s)\, P\left(\int_s^n e^{-\delta(t-\tau)} dW(\tau) \leq \frac{1}{v(s)} u - c | X(s) = D\right) ds$$

$$+ {}_n p_x^{HH} \mathbf{1}[u \geq 0]$$

$$= +P\left(0 \leq e^{\delta T_x^H} u - 2c\right) + P\left(0 \leq e^{\delta T_x} u - c\right) + {}_n p_x^{HH} \mathbf{1}[u \geq 0]$$

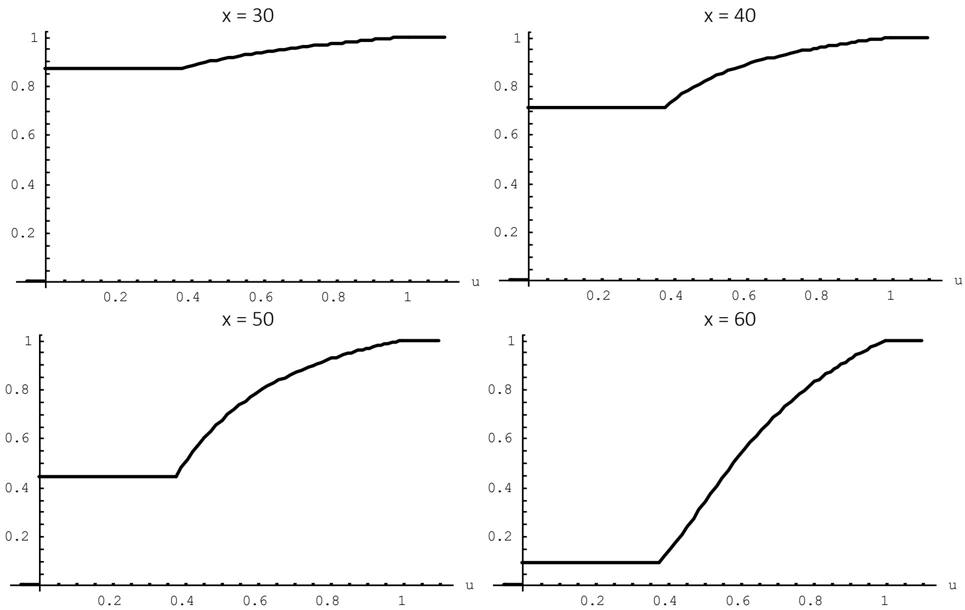
$$= P\left(T_x^H \geq \underbrace{\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{4c}{u}\right)}_{t_1}\right) + P\left(T_x \geq \underbrace{\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{c}{u}\right)}_{t_2}\right) + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \geq 0]$$

$$= {}_{t_1} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HS} + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \geq 0].$$

Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW_AI + NW_ADI dana jest następującym wzorem:

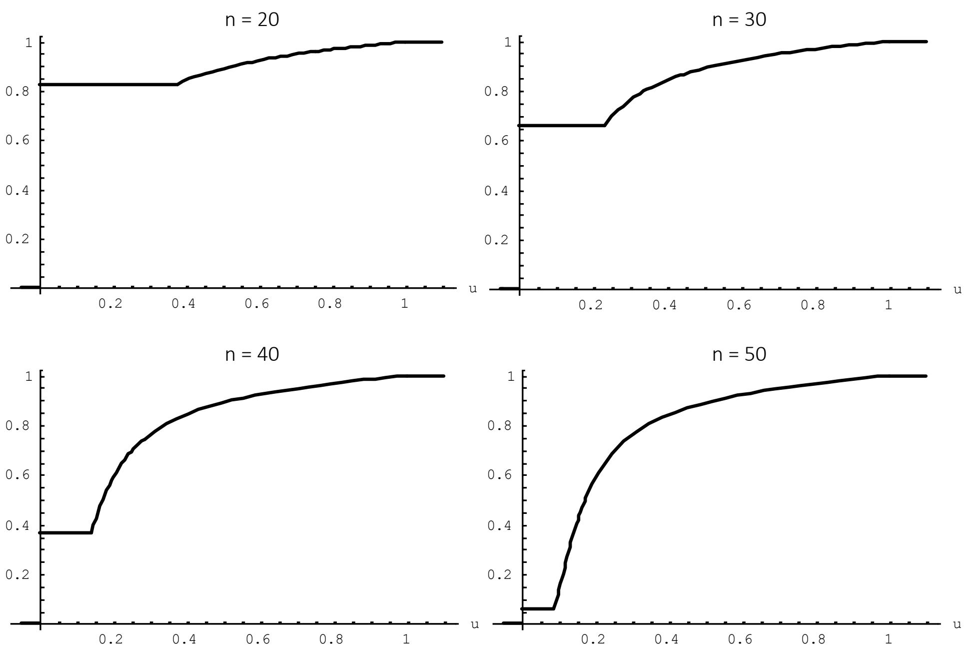
$$F_{W,0}^H(u) = \mathbb{P}_H^W(0,u) = \begin{cases} 0 & dla & u < 0 \\ {}_n p_x^{HH} & dla & 0 \leq u < ce^{-\delta n} \\ {}_{t_1} p_x^{HH} & dla & ce^{-\delta n} \leq u < 2ce^{-\delta n} \\ {}_{t_1} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HH} & dla & 2ce^{-\delta n} \leq u < c \\ 1 & dla & u \geq c \end{cases}.$$

Wykresy dystrybuant całkowitych skumulowanych świadczeń ubezpieczenia złożonego UŻ z opcją NW_AI + NW_ADI w różnych wariantach jako funkcję wieku ubezpieczonego oraz okresu ubezpieczenia przedstawiono na poniższych rysunkach. Odpowiednio na rysunku 4.9 przedstawiono rozkład dla 20-letniego ubezpieczenia zawartego z x-latkiem, przyjmując wiek $x = 30, 40, 50, 60$, natomiast na rysunku 4.10 przedstawiono prezentację graficzną dystrybuant skumulowanych świadczeń dla ubezpieczenia zawartego z mężczyzną w wieku 30 lat i różnych okresów ubezpieczenia $n = 20, 30, 40, 50$.



Rysunek 4.9. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW_AI + NW_ADI w zależności od wieku osoby ubezpieczanej *x*

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.10. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW_AI + NW_ADI dla różnych wartości *n*

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie powyższych wykresów można zaobserwować, że wiek osoby ubezpieczanej wpływa na wzrost kurtozy, choć skośność rozkładu jest podobna (wiek ubezpieczonego nie wpływa znacząco na asymetrię rozkładu). Powyższe wykresy pokazują również, że wraz z wydłużającym się okresem ubezpieczenia rozkład skumulowanych świadczeń charakteryzuje się coraz silniejszą asymetrią prawostronną, jak również wzrasta kurtoza (współczynnik skupienia), co oznacza, że rozkład całkowitych skumulowanych świadczeń charakteryzuje się większą koncentracją wokół wartości oczekiwanej.

Aby określić rozkład skumulowanych przyszłych (po czasie *t*) świadczeń, należy dokonać wyceny strumieni finansowych w okresie trwania ubezpieczenia i uwzględnić aktywną w danym momencie opcję polisy. Wówczas rozkład ten dla dowolnego momentu czasu $t \leq n$ w zależności od aktywnej opcji jest odpowiednim rozkładem warunkowym:

$$F^{H}_{W(\tau),t}(u) = P^{W}_{H}(t,u) = P\left[\int_t^n e^{-\delta(t-\tau)} dW(\tau) \leq u \,|X(t) = H\right]$$

lub

$$F^{AI}_{W(\tau),t}(u) = P^{W}_{AI}(t,u) = P\left[\int_t^n e^{-\delta(t-\tau)} dW(\tau) \leq u \,|X(t) = AI\right].$$

Dla dowolnego momentu trwania ubezpieczenia dystrybuanty te wyznaczamy analogicznie jak w przypadku całkowitych skumulowanych świadczeń. Można również, traktując je jako funkcje dwóch parametrów *t* i *u*, znaleźć ich postać, rozwiązując układ równań różniczkowych (4.13). Rozwiązując go, wyznacza się funkcję pomocniczą $\widetilde{\mathbb{P}}^W_i$, gdzie $i \in \{H, AI\}$, a następnie na ich podstawie otrzymuje się rozkład skumulowanych przyszłych świadczeń $\mathbb{P}^W_i$. Algorytm rozwiązywania równań typu PDE (*partial differential equation*), a takim równaniem jest otrzymane równanie różniczkowe (4.13), znaleźć można w pracy Norberga (2005). Procedura numeryczna polega na aproksymacji funkcji $P^W_H(t,u)$ i $P^W_{AI}(t,u)$ za pomocą funkcji otrzymanej z równania rekurencyjnego:

$$\begin{aligned} \Delta\widetilde{\mathbb{P}}^W_i(t,u) = \\ & \widetilde{\mathbb{P}}^W_i(t,u)\mu_i(t)h \\ & -\sum_{j\neq i} \mu_{ij}(t)\widetilde{\mathbb{P}}^W_j\left(t, u + \int_0^t e^{-\delta\tau} dW_j(\tau) - \int_0^t e^{-\delta\tau} dW_i(\tau) - e^{-\delta t} c_{ij}(t)\right) h\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Funkcje $\widetilde{\mathbb{P}}^W_i(t,u)$ są określone dla $t \in \{0, h, 2h, \ldots, n\}$ i $u \in \{a, a + h', a + 2h', \ldots, b\}$.

5. Kalkulacja składek netto

5.1. Zasada równoważności a sprawiedliwa cena

Na podstawie wyceny strumieni finansowych ubezpieczyciel może podejmować różne decyzje ubezpieczeniowe, a podstawowa z nich dotyczy kalkulacji **składki ubezpieczeniowej**, której **wysokość** zależy od:

– sumy ubezpieczenia (SU) – kwoty określającej maksymalne świadczenie, jakie może otrzymać ubezpieczony w razie zajścia zdarzenia objętego umową,
– okresu ubezpieczenia – okresu, na jaki zawarta została umowa ubezpieczenia,
– przedmiotu ubezpieczenia objętego ochroną ubezpieczeniową,
– stopy procentowej.

Zatem z tą operacją związane jest ryzyko ubezpieczyciela, które może wynikać ze złej oceny ryzyka związanego z przedmiotem ubezpieczenia, jak również z ustalenia niewłaściwej stopy składki. Nieprawidłowo skalkulowana składka jest dla ubezpieczyciela bardzo niekorzystnym zjawiskiem. Po pierwsze, zbyt wysoka skutkuje utratą klientów i pozycji na rynku, natomiast zbyt niska nie zabezpiecza przyszłych wypłat, co prowadzi do problemów z płynnością, a w konsekwencji do bankructwa ubezpieczyciela. Dlatego też podstawą prawidłowej kalkulacji składki ubezpieczeniowej jest przestrzeganie podstawowych zasad, do których zalicza się:

- **zasadę proporcjonalności składek i świadczeń**, która polega na utrzymaniu równowagi między wysokością składki a wysokością oczekiwanego świadczenia,
- **zasadę równoważności składki i świadczeń**, która polega na kalkulowaniu wysokości składki na podstawie wielkości ryzyka objętego umową,
- zgodnie z **zasadą równowagi składek i świadczeń** ubezpieczyciel ustala składkę na poziomie pozwalającym na utworzenie odpowiedniego funduszu ubezpieczeniowego, który wystarczy na wypłatę wszystkich ewentualnych odszkodowań i świadczeń;
- **zasadę wartości oczekiwanej**, zgodnie z którą ubezpieczyciel ustala składkę jako wartość oczekiwaną przyszłych świadczeń.

Uogólniając, część składki, która ma wystarczyć na pokrycie wypłaty odszkodowań, to tzw. składka netto, która jest ceną za ryzyko, jakie przejął ubezpieczyciel, żądając w zamian określonego wynagrodzenia. Podstawą jej kalkulacji jest równość między zaktualizowanym strumieniem składek a przyszłych świadczeń wynikających z zawartej umowy ubezpieczenia i wówczas jest to sprawiedliwa cena za ryzyko. Ze względu na to, że moment wypłaty nie jest znany, zaktualizowana wartość jest zmienną losową, a zatem składkę netto ubezpieczyciel wyznacza na podstawie wartości oczekiwanej zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych, czyli ich wartości aktuarialnych. Zatem na podstawie wartości aktuarialnej zgodnie z zasadą równoważności dokonuje się kalkulacji składki ubezpieczeniowej netto w następujący sposób (Bowers i in. 1997, Rolski 1998):

$$E(zaktualizowana\ wartość\ przyszłych\ składek) =$$
$$= E(zaktualizowana\ wartość\ przyszłych\ świadczeń).$$

Powyższa reguła naliczania składki oparta jest na zasadzie czystego ryzyka i nazywana jest klasyczną zasadą równoważności, zgodnie z którą wartość aktuarialna składek i świadczeń wynikająca z zawartej umowy ubezpieczenia w całym okresie ubezpieczenia powinna się bilansować. Ponieważ ubezpieczyciel dokonuje kalkulacji składki w momencie zawierania umowy, czyli w chwili $t_0 = 0$, oceniając strumienie płatności w momencie początkowym t_0, cały okres od tego momentu do końca okresu ubezpieczenia oznaczonego przez n traktujemy jako przyszłość, co oznacza, że składki skalkulowane są na podstawie całkowitych skumulowanych świadczeń wynikających z zawartej umowy ubezpieczenia. Z drugiej strony w przypadku ubezpieczeń na życie ubezpieczyciel dokonuje kalkulacji, uwzględniając ryzyko śmierci i zmianę wartości pieniądza w czasie, czyli tzw. ryzyko aktuarialne. Tym samym oznacza to, że należy uwzględnić filtrację generowaną przez portfel ubezpieczeniowy opartą na procesie umieralności:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbb{I}(\mathrm{T} > \mathrm{t}), 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{n}),$$

a składkę netto należy ustalić jako warunkową wartość oczekiwaną rzeczywistego, losowego kosztu ubezpieczenia, spełniającą równanie:

$$E\left[PV^W(0,n)|\mathcal{F}_t\right] = E\left[\int_0^n e^{-\delta\tau} dW(\tau)\,|\sigma\big(\mathbb{I}(T > t)\big)\right] = 0. \tag{5.1}$$

Sprawiedliwa wycena zobowiązań ubezpieczeniowych, która łączy podejście zgodne z rynkiem i wycen aktuarialnych w kontekście ubezpieczeń zdrowotnych, LTC, rentowych, odpowiedzialności cywilnej itp., jest również badana w pierwszych pracach Norberga (1993) i Harrisona (1997) z lat 90. Rozważania tego typu kontynuowane są w późniejszych pracach: Bacinello (2003), Dahl, Moller (2006), Steffensen (2006), Pelsser (2010), Möhr (2007, 2011), AIA (2014), Pelsser i Stadje (2014), Buchardt i Moller (2013, 2015), Pelsser i Ghalehjooghi (2016), Dhaene i in. (2017), Engsner i in. (2018), Delong i in. (2019a, 2019b) oraz Barigou i in. (2019).

Istotą działania firm ubezpieczeniowych w tego typu kalkulacjach jest „dzielenie się ryzykiem", czyli pokrywanie wspólnie, przez wielu ubezpieczających, indywidualnej straty. Poprzez grupowanie polis konstruowane są portfele w taki sposób, aby zakumulowana wartość zebranych składek wystarczyła na pokrycie rzeczywistej sumy wypłat w danym portfelu. Idea ta ma odzwierciedlenie w metodologii, gdyż zasadne jest wówczas (z uwagi na wystarczającą ilość danych) stosowanie zasad statystyki i oszacowanie prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia losowego z wykorzystaniem tablic trwania życia TTŻ. Uwzględniając więc oszacowany rozkład ryzyka związanego z przedmiotem ubezpieczenia opisanego funkcją $f_{T_x}(t)$, **składka netto** wyznaczana jest z zasady równoważności:

$$E\left(\int_0^n e^{-\delta(\tau-t)} f_{T_x}(\tau) dW(\tau)\right) = 0. \tag{5.2}$$

Tak ustalona wysokość składki netto stanowi udział osoby ubezpieczającej w pokryciu szkód, a jej wysokość jest ustalana na podstawie przeprowadzonej oceny ryzyka (przewidywanej liczby oraz wysokości szkód losowych). Należy podkreślić, że ubezpieczenie przez łączenie ryzyka jest możliwe tylko w sytuacji, gdy są one od siebie niezależne, bowiem proces ten (szacowania wartości przyszłych wypłat i na tej podstawie kalkulacji składki) zakłóca tzw. hazard moralny.

Kwota pieniężna, którą rzeczywiście ubezpieczony jest zobowiązany zapłacić ubezpieczycielowi za udzieloną mu ochronę w ciągu całego okresu ubezpieczenia, to tzw. **składka ubezpieczeniowa brutto** składająca się z dwóch części: **składki netto** i **narzutu**, w skład którego zgodnie z ustawą (Rozporządzenie 2016) wchodzą przeliczone na konkretnego ubezpieczającego się koszty działalności ubezpieczyciela, np. administracyjne, akwizycyjne, prewencyjne, losowe i inne. Tak ustalona składka powinna zapewnić środki gwarantujące wypłatę odszkodowań, tworzenie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych oraz pokrycie kosztów związanych z prowadzeniem działalności ubezpieczeniowej.

5.2. Opcje a wysokość jednorazowej i okresowej składki netto

Zgodnie z **zasadami matematyki aktuarialnej** składkę netto, czyli cenę ubezpieczenia wyznacza się, uwzględniając ryzyko związane z danym typem ubezpieczenia. W przeciwieństwie do klasycznych ubezpieczeń w ubezpieczeniach na życie z opcjami dodatkowymi, dokonując wyceny, należy uwzględnić nie tylko losowy moment wypłaty czy wpływ stopy procentowej, ale przede wszystkim proces aktywizacji opcji w okresie trwania ubezpieczenia, który w sposób istotny determinuje przepływy pieniężne. Zatem w kalkulacjach składki netto ubezpieczeń z opcjami dodatkowymi należy uwzględnić rozszerzone ryzyko aktuarialne wynikające z przedmiotu ubezpieczenia, czyli uwzględnienie opcji i ich wpływ na wysokość składki. Oznacza to konieczność modyfikacji klasycznej zasady równoważności, tak aby na jej podstawie prawidłowo wyznaczyć składkę ubezpieczeniową z uwzględnieniem zarówno ryzyka wynikającego z zawartej umowy podstawowej, umów dodatkowych, jak też ryzyka finansowego z nim związanego:

$$\begin{gathered} E\left[PV^{W}(0,n)|\mathcal{L}_t \wedge \mathcal{G}_t \wedge \mathcal{H}_t\right] = \\ E\left[PV^{W}(0,n)|\sigma\left(\mathbb{I}\left(T_x^i > t\right)\right) \wedge X(0) = \mathrm{H}\right] = 0. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Przyjmując zatem, że proces aktywizacji opcji ubezpieczeniowych $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ jest procesem Markowa, i uwzględniając wszystkie rodzaje strumieni płatności (składki, renty i jednorazowe świadczenia), jakie mogą wystąpić w ubezpieczeniu z opcjami, zasada równoważności z uwzględnieniem procesu skumulowanych świadczeń (4.2) dla ubezpieczeń z opcjami dodatkowymi przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} &E\left[PV^{\Pi}(0,n)|\sigma\left(\mathbb{I}\left(T_x^i > 0\right)\right) \wedge X(0) = \mathrm{H}\right] \\ &= E\left[PV_0^R(0,n) + PV_0^D(0,n) + PV_0^C|\sigma\left(\mathbb{I}\left(T_x^i > 0\right)\right) \wedge X(0) = H\right]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Składka netto wyznaczona wg powyższej zasady nazywana jest ceną sprawiedliwą i wyznacza się ją na podstawie wartości aktuarialnych, uwzględniając ustaloną stopę wolną od ryzyka oraz ryzyko śmiertelności i zajścia różnych zdarzeń objętych ochroną ubezpieczeniową. Ze względu na częstotliwość płacenia składki ubezpieczeniowe dzieli się na:

- jednorazową składkę netto (JSN) stałej wysokości płaconą z góry za cały okres ubezpieczenia, czyli w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia (Π_{JSN}^{net}),
- składkę okresową (oznaczoną π_t^{net}) opłacaną przez cały okres ubezpieczenia.

W przypadku składki jednorazowej jest ona płacona z góry za cały okres ubezpieczenia. Niezależnie od typu ubezpieczenia jednorazowa składka netto jest taką wielkością funduszu, którą ubezpieczony powinien zapłacić w chwili zawierania umowy, aby ubezpieczyciel dysponował wystarczającymi środkami na pokrycie wypłaty wszystkich świadczeń w trakcie trwania umowy. Ubezpieczony opłaca składki, gdy jest zdrowy, a to odpowiada sytuacji, gdy aktywna jest opcja *H* ubezpieczenia, w tym przypadku zaktualizowana wartość dochodów z tytułu składek równa jest jednej składce i zgodnie z powyższym wzorem jest ona równa:

$$\begin{aligned} &\Pi_{JSN}^{net} = \Pi_H^{net} \\ &= E\left(PV^R(0,n) + PV^D(0,n) + PV^C\middle|\sigma\left(\mathbb{I}\left(T_x^i > 0\right)\right) \wedge X(0) = H\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Podstawiając do równania (5.5) wartości aktuarialne dane wzorami (3.10)-(3.13), otrzymuje się jednorazową składkę netto (JSN) dla polisy ubezpieczenia na życie z opcjami dodatkowymi postaci:

$$\Pi_{JSN}^{net} = \underbrace{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_0^n e^{-\delta\tau} c_{jk}(\tau)\, {}_{\tau}p_x^{Hj} \mu_{jk}(x+\tau)d\tau}_{\textit{świadczenie z tytułu zajścia zdarzenia losowego}} + \underbrace{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{Hj} dR_j(\tau)}_{renta} + \underbrace{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{Hj} dD_j(\tau)}_{\textit{świadczenie z tytułu dożycia}} \tag{5.6}$$

Trzy składniki tej sumy mają następującą interpretację:

– jest to część składki przeznaczona na wypłatę renty w razie utraty zdrowia lub zdolności do pracy wskutek zajścia zdarzenia przewidzianego w umowie,
– oznacza część składki przeznaczoną na wypłatę jednorazowego świadczenia z tytułu dożycia wieku *n*,
– oznacza część składki przeznaczoną na wypłatę jednorazowego świadczenia z tytułu zajścia zdarzenia losowego objętego umową ubezpieczeniową.

Składka netto przeznaczona jest na pokrycie aktualnych i przyszłych świadczeń. Jest więc sumą części składki przeznaczonych na pokrycie ryzyka związanego z objęciem umową ubezpieczenia wielorakich przypadków życiowych. Dwa podstawowe przypadki życiowe, życie i śmierć, objęte są ubezpieczeniem podstawowym, natomiast przypadki życiowe wyodrębnione w ramach pierwszego z nich objęte są umowami dodatkowymi, stanowiącymi opcje dodatkowe do ubezpieczenia podstawowego. Dokonując prostych przekształceń wzoru (5.6), otrzymuje się jednorazową składkę netto w ubezpieczeniu z opcjami dodatkowymi jako sumę dwóch wielkości obejmujących świadczenia z umowy podstawowej UŻ+UD i opcji dodatkowych:

$$\Pi_{JSN}^{net} = \underbrace{\underbrace{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau} c_{jD}(\tau)\, {}_{\tau}p_x^{Hj} \mu_{jD}(x+\tau)d\tau}_{UŻ} + \underbrace{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{Hj} dD_j(\tau)}_{UD}}_{\textit{umowa podstawowa}} + \underbrace{\underbrace{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{Hj} dR_j(\tau)}_{renta} + \underbrace{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j\wedge k\neq D}\int_0^n e^{-\delta\tau} c_{jk}(\tau)\, {}_{\tau}p_x^{Hj} \mu_{jk}(x+\tau)d\tau}_{\substack{\textit{świadczenie z tytułu zajścia zdarzenia losowego} \\ \textit{wynikającego z opcji dodatkowych}}}}_{\textit{opcje dodatkowe}} \tag{5.7}$$

JSN jest więc sumą części składki pokrywającej ryzyko wynikające z umowy podstawowej: śmierć lub dożycie końca okresu z zdrowiu lub chorobie (klasyczne ubezpieczenie nie rozróżnia tych przypadków) oraz części przeznaczonej na pokrycie ryzyka związanego z umowami dodatkowymi. Tym samym przedstawiony wzór jest uogólnieniem wzoru na jednorazową składkę netto w klasycznych ubezpieczeniach życiowych, które znaleźć możemy w literaturze (Gerber 1995, Ostasiewicz 2004), oraz wielorakich (Haberman, Pitacco 1999, Wolthuis 2003), w których nie uwzględniano wszystkich strumieni płatności.

Ubezpieczony może opłacać składki nie tylko w formie jednorazowej, ale również przez dowolny okres ubezpieczenia. Najczęściej stosowaną formą płacenia za ubezpieczenie jest składka okresowa. Płatności dokonywane są w równych odstępach czasu przez ustalony okres trwania ubezpieczenia lub do końca okresu ubezpieczenia. Jako zasadę przyjmuje się, że składka płacona jest z góry raz w roku, choć towarzystwa ubezpieczeniowe dopuszczają składki w formie półrocznej, kwartalnej lub miesięcznej. Wówczas składka określona jest ogólnym wzorem:

$$\begin{aligned}&\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{HH}\, d\Pi_H(\tau) = \\ &\quad E\big(PV^R(0,n) + PV^D(0,n) + PV^C \big| \sigma\big(\mathrm{I}(T>0)\big) \wedge X(0) = H\big).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Podstawiając do powyższego wzoru wartości zaktualizowane świadczeń wynikających z ochrony ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}&\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{HH} \pi_j(\tau)\, d\tau = \\ &\underbrace{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_0^n e^{-\delta\tau} \mathrm{c}_{jk}(\tau)\, {}_{\tau}p_x^{Hj}\, \mu_{jk}(x+\tau)\, d\tau}_{\textit{świadczenie z tytułu zajścia zdarzenia losowego}} + \underbrace{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{Hj}\, d\left(R_j(\tau) + D_j(\tau)\right)}_{\textit{świadczenia związane z aktywną opcją}}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Przyjmując, że składki płacone są ze stałą intensywnością, tzn. $\pi_t^{net} = \pi^{net}$, jej wysokość oblicza się według następującego wzoru:

$$\begin{aligned}\pi^{net} &= \\ &\frac{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{Hj}\, dR_j(\tau)}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{HH}\, d\tau} + \frac{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{Hj}\, dD_j(\tau)}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{HH}\, d\tau} \\ &+ \frac{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_0^n e^{-\delta\tau} \mathrm{c}_{jk}(\tau)\, {}_{\tau}p_x^{Hj}\, \mu_{jk}(x+\tau)\, d\tau}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\, {}_{\tau}p_x^{HH}\, d\tau}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Natomiast jeśli składka stałej wysokości, jak również renty wypłacane są zgodnie z umową w ustalonych odstępach czasu, wówczas wzór (5.9) przyjmuje postać:

$$\pi^{net} =$$

$$\frac{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{Hj} r_j(\tau)\lceil d\tau\rceil}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HH}\lfloor dt\rfloor} + \frac{\sum_{j\in S}\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{Hj} d_j(\tau)d\tau}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HH}\lfloor dt\rfloor} + \frac{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_0^n e^{-\delta\tau} c_{jk}(\tau)\ {}_{\tau}p_x^{Hj}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HH}\lfloor dt\rfloor}. \tag{5.11}$$

Uwzględniając płatności z góry lub z dołu, mamy do czynienia z sumami Stieltjesa i wzór na składkę ma równoważną postać:

$$\pi_t^{net} =$$

$$\frac{\sum_{j\in S}\sum_{\nu\in\mathcal{T}} e^{-\delta(\nu+1)}\ {}_{\nu+1}p_x^{Hj} r_j(\nu+1)}{\sum_{\nu\in\mathcal{T}} e^{-\delta\nu}\ {}_{\nu}p_x^{HH}} + \frac{\sum_{j\in S}\sum_{\nu\in\mathcal{T}} e^{-\delta\nu}\ {}_{\nu}p_x^{Hj} d_j(\nu)}{\sum_{\nu\in\mathcal{T}} e^{-\delta\nu}\ {}_{\nu}p_x^{HH}} + \frac{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_0^n e^{-\delta\tau} c_{jk}(\tau)\ {}_{\tau}p_x^{Hj}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau}{\sum_{\nu\in\mathcal{T}} e^{-\delta\nu}\ {}_{\nu}p_x^{HH}}. \tag{5.12}$$

Niezależnie od rodzaju i sposobu płatności w powyższych wzorach interpretacja poszczególnych składników sumy jest następująca:

– składka przeznaczona na wypłatę renty w razie utraty zdrowia lub zdolności do pracy wskutek zajścia zdarzenia przewidzianego w umowie,
– składka przeznaczona na wypłatę jednorazowego świadczenia z tytułu dożycia ustalonego wieku *v*,
– składka przeznaczona na wypłatę jednorazowego odszkodowania z tytułu zajścia w życiu ubezpieczonego zdarzenia objętego umową.

Analogicznie jak w przypadku jednorazowej składki netto również w tym przypadku, dokonując odpowiednich przekształceń składkę netto, można przedstawić jako sumę składki podstawowej oraz składki dodatkowej przeznaczonej na pokrycie świadczeń dodatkowych.

5.3. Składki netto w wybranych ubezpieczeniach z opcjami

Kontynuując przykłady: tradycyjnego ubezpieczenia (UŻ/UD) oraz ubezpieczenia złożonego z opcjami dodatkowymi NW_AI + NW_ADI, w kolejnym etapie analizy wyznaczono dla nich składkę netto. Do wyznaczenia składki jako odpowiedniej warunkowej wartości oczekiwanej konieczna jest znajomość procesu aktywizacji opcji omówionego w (2.4) oraz specyfika strumieni finansowych (3.4) oraz (4.4). Na tej podstawie jednorazową składkę netto w tradycyjnym ubezpieczeniu na życie (UŻ), dożycie (UD) oraz życie i dożycie (UŻD) obliczmy według ogólnego wzoru (5.7), który w przypadku tych ubezpieczeń przyjmuje następującą postać:

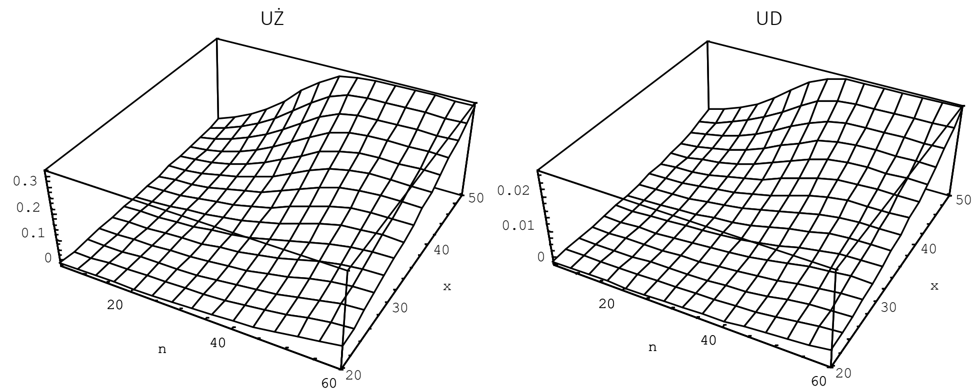
$$\Pi_{JSN}^{net} = c\int_0^n e^{-\delta\tau}\,{}_{\tau}p_x^{HH}\mu(x+\tau)d\tau + de^{-\delta\cdot n}\,{}_{n}p_x^{HH}.$$

Pierwszy składnik sumy oznacza składkę wpłaconą przez ubezpieczonego z tytułu zawarcia umowy UŻ, natomiast drugi składnik sumy jest to składka płacona z tytułu zawarcia umowy na dożycie UD.

Składkę płatną z pewną stałą intensywnością wyznaczamy ze wzoru (5.10). Przy uwzględnieniu strumieni płatności charakterystycznych dla ubezpieczeń na życie i dożycie przyjmuje ona postać:

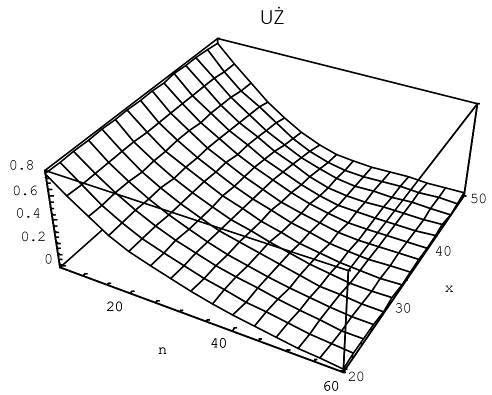
$$\pi^{net} = \frac{c\int_0^n e^{-\delta\tau}\,{}_{\tau}p_x^{HH}\mu(x+\tau)d\tau + de^{-\delta\cdot n}\,{}_{n}p_x^{HH}}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\,{}_{\tau}p_x^{HH}d\tau}.$$

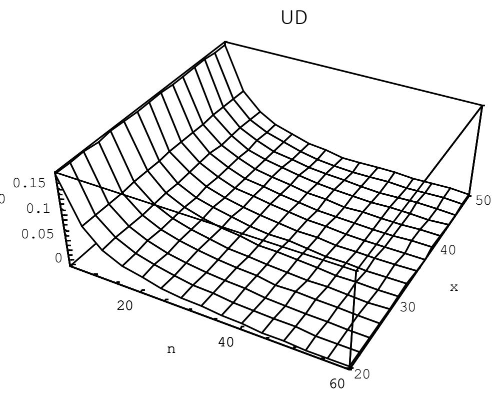
Przedstawione wzory są podstawą dalszych obliczeń numerycznych. Algorytmy obliczeń wysokości jednorazowej oraz płatnej z pewną stałą intensywnością składki netto opracowano, wykorzystując program Mathematica. Na wysokość składki netto wpływ ma wiek ubezpieczonego oznaczony *x* oraz okres ubezpieczenia *n*, tak więc można ją traktować jako funkcje dwóch parametrów. Wykres tych funkcji przedstawiono na poniższych rysunkach.



Rysunek 5.1. Jednorazowa składka netto i netto stałej wysokości płatna przez cały okres ubezpieczenia jako funkcja *x*, *n* w ubezpieczeniach UŻ

Źródło: opracowanie własne.





Rysunek 5.2. Jednorazowa składka netto i netto stałej wysokości płatna przez cały okres ubezpieczenia jako funkcja *x*, *n* w ubezpieczeniach UD
Źródło: obliczenia własne.

W przypadku ubezpieczenia na życie UŻ zarówno jednorazowa składka netto, czyli wartość oczekiwana całkowitych świadczeń wypłacanych przez ubezpieczyciela, jak i składka netto stałej wysokości płatna przez cały okres ubezpieczenia są rosnącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia n dla każdego wieku wstępu. Jako funkcje wieku osoby ubezpieczanej, dla długich (czasowo) kontraktów ubezpieczeniowych, są funkcjami rosnącymi, natomiast dla małych wartości n jest to funkcja prawie stała. Z kolei w przypadku ubezpieczenia na dożycie UD jednorazowa składka netto i składka netto stałej wysokości są malejącymi funkcjami okresu trwania ubezpieczenia n dla każdego wieku wstępu i jest to związane z malejącym prawdopodobieństwem, że wypłata świadczenia nastąpi. Natomiast jako funkcja wieku osoby ubezpieczanej składka ta dla dowolnych wartości n wydaje się być funkcją prawie stałą. Zatem zarówno jednorazowa, jak i okresowa składka to funkcje o takich samych własnościach, a różnica wynika tylko z rzędu wielkości.

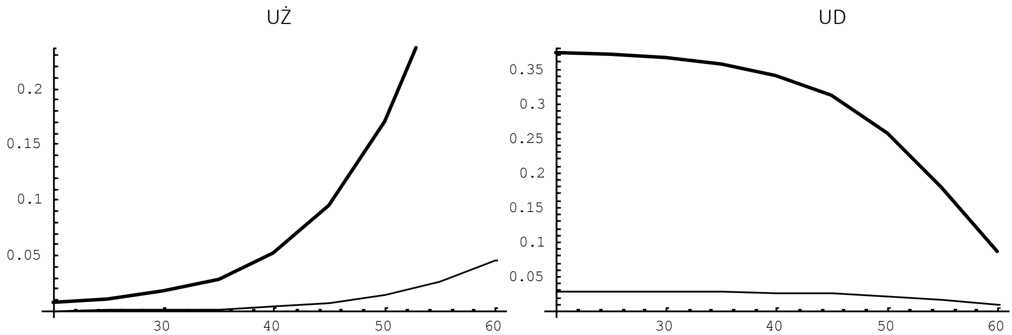
W dalszej części zbadano szczegółowo wpływ wieku osoby ubezpieczanej na wysokość składki netto w ubezpieczeniach UŻ/UD, co stanowi u ubezpieczycieli podstawę tzw. **tablic składek**. W przykładzie przyjęto funkcję intensywności daną wzorem (2.22), techniczną stopę oprocentowania równą 5% oraz okres ubezpieczenia 20 lat. W tabeli 5.1 przedstawione zostały obliczone na podstawie opracowanych algorytmów wartości składki netto w ubezpieczeniach UŻ, UD oraz UŻD dla sumy ubezpieczenia równej 1 *j.p.*

Tabela 5.1. Wysokość jednorazowej składki netto w 20-letnim ubezpieczeniu UŻ, UD i UŻD

x	UŻ		UD	
	Π_{JSN}^{net}	π^{net}	Π_{JSN}^{net}	π^{net}
20	0,00811954	0,000638755	0,371685	0,02924
25	0,0111181	0,000875808	0,369506	0,0291071
30	0,0170559	0,00134709	0,365197	0,0288436
35	0,028726	0,0022807	0,35675	0,0283242
40	0,0513228	0,00411713	0,340474	0,0273129
45	0,0938061	0,00767911	0,310186	0,0253923
50	0,169204	0,0144017	0,257566	0,0219226
55	0,289062	0,0264509	0,177748	0,02924
60	0,445232	0,0462222	0,0848003	0,0291071

Źródło: obliczenia własne.

Wysokość składki netto w zależności od wieku wstępu osoby ubezpieczanej w terminowych (dwudziestoletnich) ubezpieczeniach życiowych UŻ/UD przedstawiono na rysunku 5.3 (cienka linia to π^{net}, gruba – Π_{JSN}^{net}).



Rysunek 5.3. Wielkość składki netto dla 20-letnich ubezpieczeń UŻ i UD w zależności od wieku wstępu ubezpieczonego *x*

Źródło: opracowanie własne.

Zauważyć można, że w ubezpieczeniach UŻ zarówno wysokość jednorazowej składki netto, jak też składki o stałej wysokości płatnej przez cały okres ubezpieczenia wzrasta wraz z wiekiem osoby ubezpieczonej, natomiast w przypadku ubezpieczenia UD wysokość składki netto maleje wraz z wiekiem ubezpieczonej osoby. Wynika to z faktu, że prawdopodobieństwo zgonu rośnie wraz z wiekiem, a więc ubezpieczenie UŻ staje się wraz z wiekiem ubezpieczonego droższe. Prawdopodobieństwo dożycia określonego wieku maleje wraz z wiekiem ubezpieczonego, a więc ubezpieczenie UD staje się tańsze.

Natomiast rozważając złożoną umowę ubezpieczenia na życie z omawianą opcją wynikającą z zajścia nieszczęśliwego wypadku: NW_AI + NW_ADI, postępujemy analogicznie. Należy jednak uwzględnić wszystkie strumienie finansowe związane z tego typu umową oraz proces aktywizacji opcji. W takim przypadku wzór ogólny (5.7) pozwalający wyznaczyć wysokość jednorazowej składki netto przyjmuje następującą postać:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{JSN}^{net} = &\\
&\underbrace{c\int_0^n e^{-\delta\tau}\,{}_{\tau}p_x^{HH}\mu(x+\tau)d\tau + de^{-\delta n}\,{}_{n}p_x^{HH}}_{A}\\
&+\underbrace{\int_0^n e^{-\delta\tau}\,{}_{\tau}p_x^{HAI}\nu(x+\tau)d\tau + de^{-\delta n}\,{}_{n}p_x^{HAI}}_{B}\\
&+\underbrace{r\int_0^n e^{-\delta\tau}\,{}_{\tau}p_x^{HAI}d\tau + (2+\beta)c\int_0^n e^{-\delta\tau}\,{}_{\tau}p_x^{HH}\sigma(x+\tau)d\tau}_{C}\,,
\end{aligned}
$$

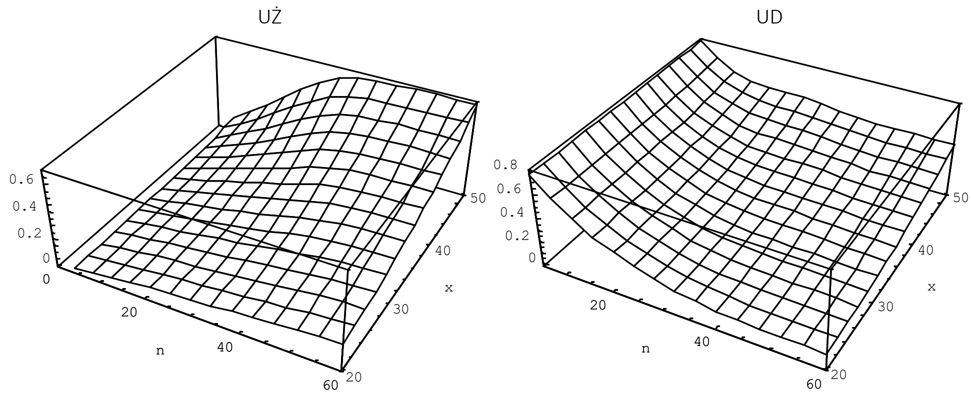
gdzie

A – jest to część składki przeznaczona na świadczenia wypłacane z tytułu umowy podstawowej na życie lub dożycie (w zdrowiu),

B – jest to część składki przeznaczona na świadczenia wypłacane z tytułu umowy na życie i dożycie (w chorobie),

C – jest to część składki przeznaczona na świadczenia wypłacane z tytułu umowy dodatkowej (C_1 – renta inwalidzka i C_2 – jednorazowa wypłata jako ustalony % sumy ubezpieczenia wypłacony z tytułu trwałego inwalidztwa opcja NW_AI lub dwukrotna suma ubezpieczenia wypłacona z tytułu inwalidztwa opcja NW_ADI).

Podstawiając odpowiednie prawdopodobieństwa przejścia i intensywności przejścia, otrzymuje się wzory będące podstawą dalszych obliczeń numerycznych.



Rysunek 5.4. Jednorazowa składka netto jako funkcja *x*, *n* w ubezpieczeniach UŻ i UD z opcją NW_AI + NW_ADI

Źródło: obliczenia własne.

Podobnie jak w przykładzie poprzednim, traktując składkę netto jako funkcję wieku osoby ubezpieczanej, trudno określić jej własności i ustalić zależność. Dlatego też w dalszej części zbadano wpływ wieku osoby ubezpieczanej na wysokość składki netto w ubezpieczeniach UŻ/UD z opcją dodatkową NW_AI + NW_ADI, ustalając okres ubezpieczenia równy 20 lat.

Przyjęto więc funkcję intensywności daną wzorem (2.29), techniczną stopę oprocentowania równą 5% oraz sumę ubezpieczenia równą 1 *j.p.* W tabelach 5.2 i 5.3 przedstawione zostały wysokości jednorazowej składki netto Π_{JSN}^{net} odpowiednio dla umowy ubezpieczenia na życie (UŻ) oraz na dożycie (UD) z opcją NW_AI + ADI wraz ze wszystkimi składowymi.

Tabela 5.2. Wysokość JSN i jej podział dla 20-letniego UŻ z opcją NW_AI + ADI

x	A	B	C_1	C_2	Π_{JSN}^{net}
20	0.0728347	0.000356559	0.0153208	0.000554331	0.0890663
30	0.0886363	0.000859061	0.0314536	0.00099884	0.121948
40	0.123136	0.00367648	0.0907084	0.0026505	0.220171
50	0.186132	0.0207862	0.275445	0.00801686	0.49038
60	0.253304	0.102191	0.641234	0.0200709	1.0168

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5.3. Wysokość JSN i jej podział dla 20-letniego UD z opcją NW_AI + ADI

x	*A*	*B*	C_1	C_2	Π_{JSN}^{net}
20	0.328431	0.00459924	0.0153208	0.000554331	0.348905
30	0.312167	0.0099944	0.0314536	0.00099884	0.354614
40	0.268769	0.0287459	0.0907084	0.0026505	0.390873
50	0.167983	0.0778221	0.275445	0.00801686	0.529267
60	0.0349839	0.1205	0.641234	0.0200709	0.816788

Źródło: obliczenia własne.

Natomiast wysokość stałej składki okresowej płatnej przez ubezpieczonego przez cały okres ubezpieczenia lub do momentu śmierci zgodnie z ogólnym wzorem w rozpatrywanym ubezpieczeniu z opcją NW określona jest następująco:

$$\pi^{net} =$$

$$c\frac{\int_0^n e^{-\delta\tau}\left({}_{\tau}p_x^{HH}\mu(x+\tau) + {}_{\tau}p_x^{HAI}\nu(x+\tau)\right)d\tau}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HH}d\tau} + \frac{de^{-\delta n}\left({}_{n}p_x^{HH} + {}_{n}p_x^{HAI}\right)}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HH}d\tau}$$

$$+\frac{b\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HAI}d\tau + (2+\beta)c\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HH}\sigma(x+\tau)d\tau}{\int_0^n e^{-\delta\tau}\ {}_{\tau}p_x^{HH}d\tau}.$$

Wyniki kalkulacji składki płatnej ze stałą intensywnością przez cały okres ubezpieczenia π^{net} dla ubezpieczenia UŻ oraz UD z opcją dodatkową przedstawiono w poniższych tabelach 5.4 i 5.5.

Tabela 5.4. Wysokość składki netto o stałej wysokości i jej podział dla 30-letniego UŻ z opcją NW_AI + ADI

x	*A*	*B*	C_1	C_2	π^{net}
20	0.00601213	0.0000294321	0.00126465	0.0000457572	0.00735197
30	0.00741183	0.0000718353	0.00263018	0.0000835238	0.0101974
40	0.010676	0.000318753	0.0078645	0.000229801	0.019089
50	0.017871	0.00199574	0.0264463	0.000769721	0.0470828
60	0.0316004	0.0127486	0.0799957	0.0025039	0.126849

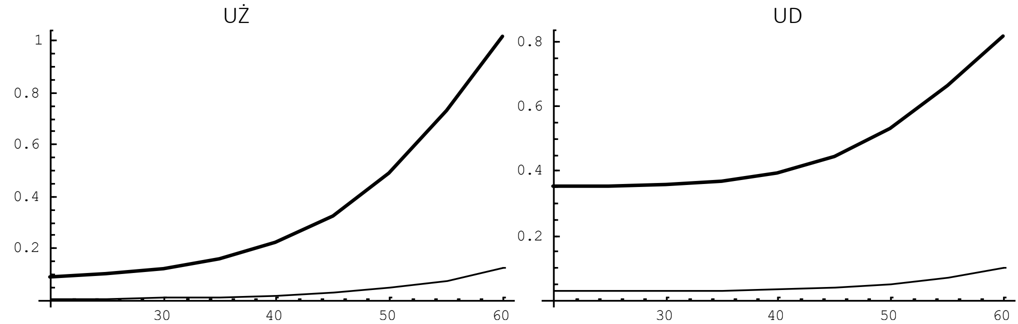
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5.5. Wysokość składki netto o stałej wysokości i jej podział dla 20-letniego UD z opcją NW_AI + ADI

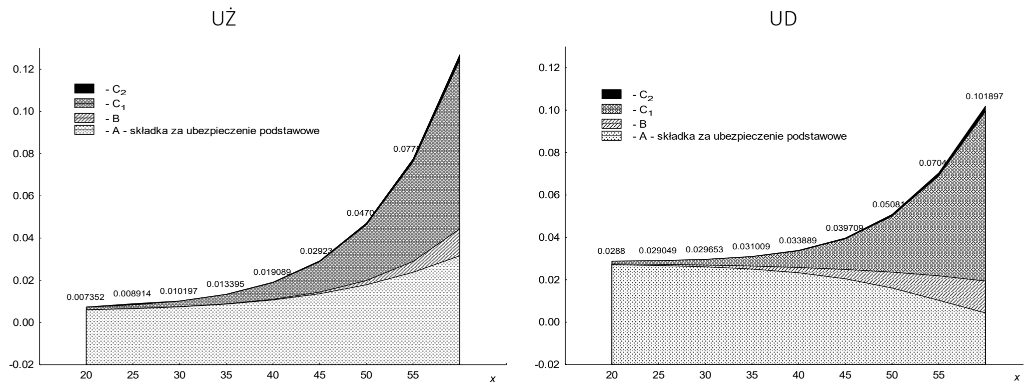
x	*A*	*B*	C_1	C_2	π^{net}
20	0.0271103	0.000379644	0.00126465	0.0000457572	0.0288004
30	0.0261037	0.000835739	0.00263018	0.0000835238	0.0296531
40	0.0233025	0.00249229	0.0078645	0.000229801	0.0338891
50	0.0161285	0.00747192	0.0264463	0.000769721	0.0508164
60	0.00436433	0.0150327	0.0799957	0.0025039	0.101897

Źródło: obliczenia własne.

Zależność wysokości składki od wieku wstępu ubezpieczonego w ubezpieczeniu UŻ/UD z wykupioną opcją NW_AI + ADI przedstawiono również na rysunku 5.5.



Rysunek 5.5. Wysokość jednorazowej składki netto i płatnej stałej wysokości dla 20-letniego złożonego ubezpieczenia (UŻ, UD) z opcją NW_AI + NW_ADI
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 5.6. Struktura składki netto stałej wysokości dla 20-letniego złożonego ubezpieczenia (UŻ, UD) z opcją NW_AI + NW_ADI
Źródło: opracowanie własne.

Analizując przedstawione tabele składek i ich graficzną prezentację, możemy zauważyć, że w przypadku ubezpieczeń z opcjami we wszystkich typach ubezpieczeń wysokość składek rośnie wraz z wiekiem ubezpieczonego, co jest odmienne w stosunku do zależności obserwowanych dla ubezpieczeń tradycyjnych. Porównując z ubezpieczeniami tradycyjnymi, obserwujemy różnicę w przypadku ubezpieczenia na dożycie UD. Dlatego też interesujące jest zbadanie udziału poszczególnych części składki związanych z różnymi przypadkami życiowymi objętymi ubezpieczeniem w składce całkowitej. Wykazano, że składka netto jest sumą części pokrywającej ryzyko wynikające z umowy podstawowej (śmierć, dożycie końca okresu) oraz części przeznaczonych na pokrycie ryzyka związanego z różnymi umowami dodatkowymi. Na podstawie przedstawionych obliczeń i rysunków można stwierdzić, że struktura zarówno jednorazowej, jak i okresowej składki netto zmienia się w zależności od wieku wstępu ubezpieczonego. Rozpatrując osoby młode w wieku do 35 lat, zasadniczą część składki netto w przypadku umów podstawowych wszystkich typów ubezpieczeń (UŻ, UD) stanowi część przeznaczona na pokrycie ryzyka wynikającego z umowy podstawowej, czyli ryzyko śmierci lub dożycia końca okresu ubezpieczenia. Wraz z wiekiem część składki przeznaczona na pokrycie ryzyka wynikającego z opcji dodatkowych wzrasta niezależnie od typu umowy podstawowej, co zilustrowano w tabeli 5.6.

Tabela 5.6. Struktura dla 20-letniego ubezpieczenia UŻ/UD z opcją NW_AI + ADI

	UŻ				**UD**			
x	***A***	***B***	C_1	C_2	***A***	***B***	C_1	C_2
20	81,78%	0,40%	17,20%	0,62%	94,13%	1,32%	4,39%	0,16%
25	78,25%	0,51%	20,55%	0,70%	92,03%	1,84%	5,93%	0,20%
30	72,68%	0,70%	25,79%	0,82%	88,03%	2,82%	8,87%	0,28%
35	65,02%	1,06%	32,93%	0,99%	80,79%	4,56%	14,22%	0,43%
40	55,93%	1,67%	41,20%	1,20%	68,76%	7,35%	23,21%	0,68%
45	46,56%	2,67%	49,35%	1,43%	51,54%	11,08%	36,33%	1,05%
50	37,96%	4,24%	56,17%	1,63%	31,74%	14,70%	52,04%	1,51%
55	30,70%	6,63%	60,85%	1,82%	14,64%	16,40%	66,95%	2,00%
60	24,91%	10,05%	63,06%	1,97%	4,28%	14,75%	78,51%	2,46%

Źródło: obliczenia własne.

Powyższe wyniki potwierdzają, że trzon składki w ubezpieczeniu złożonym u osób w wieku odpowiednio do 40 lat w przypadku UŻ i 45 lat dla UD stanowi składka na ryzyko wynikające z umowy podstawowej. Może to uzasadniać fakt, że firmy ubezpieczeniowe najczęściej oferują możliwość ochrony zdrowia tylko jako dodatek do ubezpieczenia podstawowego. Natomiast w przypadku osób starszych z punktu widzenia ubezpieczyciela ryzyko związane z wypłatą dodatkowych świadczeń jest tak duże, że ubezpieczenie staje się zbyt drogie i dlatego też firmy nie umożliwiają osobom w wieku powyżej 60 lat wykupywania opcji dodatkowych. W przedstawionych wynikach nie znajduje natomiast uzasadnienia uzależnianie przez firmy ubezpieczeniowe wysokości składki od umowy dodatkowej wyłącznie od sumy ubezpieczenia, ponieważ struktura składki zależy, tak jak jej wysokość, przede wszystkim od wieku ubezpieczonego. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że w przypadku umów ubezpieczenia zawieranych z osobami w wieku powyżej 45 lat część składki za ubezpieczenie dodatkowe stanowi aż od 40% do 96% składki całkowitej w zależności od przyjętego wariantu umowy podstawowej, podczas gdy w przypadku, gdy umowa zawarta jest z osobą w wieku do 45 lat, udział ten wynosi od 5% do 40%. Przy obliczaniu wysokości składki za ubezpieczenie dodatkowe konieczne jest też uwzględnianie wieku osoby ubezpieczanej.

6. Aktuarialne metody obliczania rezerw matematycznych składek

6.1. Rezerwy matematyczne składek i kapitał podwyższonego ryzyka

Działalność ubezpieczeniowa ze względu na swoje społeczne i gospodarcze znaczenie poddana jest szczególnemu nadzorowi i w związku z tym na firmy ubezpieczeniowe nałożone jest wiele wymogów, których celem jest zapewnienie ich wypłacalności i zagwarantowania bezpieczeństwa ubezpieczonych. Kluczowy aspekt ram regulacyjnych w tym zakresie dotyczy konieczności ustalenia tzw. kapitału podwyższonego ryzyka, który ma wystarczyć na pokrycie rzeczywistego ryzyka ubezpieczeniowego objętego ochroną. W tym celu ubezpieczyciel, chcąc zabezpieczyć się przed nieprzewidzianymi stratami, na podstawie wyceny przepływów pieniężnych powinien tworzyć tzw. fundusz rezerwowy, który powinien zrównoważyć ponoszone przez niego ryzyko. Zgodnie z ustawą (Ustawa 2003, 2015) firma ubezpieczeniowa musi dysponować m.in. odpowiednią wysokością rezerw związanych ze składką ubezpieczeniową, które stanowią odłożoną ze składek sumę na pokrycie przyszłych zobowiązań.

W związku z tym tworzenie rezerw jest nie tylko elementem kalkulacji składek ubezpieczeniowych, lecz także istotnym czynnikiem w procesie uzgadniania warunków kontraktu ubezpieczeniowego, który umożliwia określenie zakresu zysków, które muszą być wzięte pod uwagę przy konstrukcji ubezpieczenia. Ustawa (Ustawa 2003, 2015) nakłada na ubezpieczyciela obowiązek obliczania rezerw w określonych momentach trwania umowy. Przy wycenie strumieni płatności w momencie t cały okres od tego momentu do końca okresu ubezpieczenia oznaczonego przez n traktujemy jako przyszłość. Istnieją dwie metody obliczania rezerwy matematycznej składek (Haberman, Pitacco 1999):

- metoda prospektywna,
- metoda retrospektywna.

Metody obliczania rezerw matematycznych w przypadku tradycyjnych ubezpieczeń można znaleźć w literaturze aktuarialnej (Haberman, Pitacco 1999, Dickson 2006, Christiansen i in. 2014, Homa 2014), według której rezerwę oblicza się na podstawie przyszłych lub przeszłych przepływów pieniężnych w zależności od metody.

Metoda prospektywna polega na określeniu wystarczającej wielkości rezerw, biorąc pod uwagę przyszłe przychody firmy ubezpieczeniowej z tytułu składek oraz rozchody związane z wypłatami odszkodowań i świadczeń. Dlatego rezerwa prospektywna, którą powinna posiadać firma ubezpieczeniowa po *t* latach od momentu zawarcia umowy, równa jest zdyskontowanej do chwili wartości oczekiwanej różnicy między przyszłymi świadczeniami i składkami. Oznacza się ją V_t^+ i można przedstawić ją następująco:

$$V_t^+ = E(PV_t^W - PV_t^\Pi),$$

gdzie PV_t^Π jest to zaktualizowana wartość (w momencie) wpływów z tytułu przyszłych składek, natomiast PV_t^W to zaktualizowana wartość przyszłych zobowiązań ubezpieczyciela.

Drugą metodą obliczenia rezerwy matematycznej jest **metoda retrospektywna**, która oparta jest na przychodach i rozchodach ubezpieczyciela z przeszłości. Zgodnie z tą metodą rezerwa retrospektywna stanowi zakumulowaną wartość oczekiwaną różnicy między uzyskanymi składkami i wypłaconymi świadczeniami w ciągu *t* lat trwania umowy. Rezerwa retrospektywna oznaczana jest jako V_t^- . Wielkość rezerwy prospektywnej i retrospektywnej są sobie równe w każdej chwili trwania umowy, dlatego też obliczając rezerwę, można stosować dowolną z metod, jednak częściej stosuje się metodę prospektywną, a wyznaczoną w ten sposób rezerwę oznacza się $V_t \cong V(t)$. W związku z tym rezerwy matematyczne tradycyjnych ubezpieczeń na życie i dożycie należy ustalić jako wartość oczekiwaną:

$$V(t) = E[PV_t^F(\mathcal{T})] = E\left[\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)} dF(\tau)\right] = 0. \tag{6.1}$$

Problem tworzenia rezerw matematycznych w zakresie szeroko pojętych ubezpieczeń podejmowali: Norberg (1995, 2001, 2005, 2014), Møller i Steffensen (2007), Pelsser (2010), Pelsser i Stadje (2014), Christiansen (2014), Happ i in. (2015), Pelsser i Ghalehjooghi (2016) oraz Engsner i in. (2018).

Firmy ubezpieczeniowe oferujące złożone produkty ubezpieczeniowe, jakimi są ubezpieczenia na życie z opcjami dodatkowymi, zgodnie z Solvency II (Dyrektywa UE 2009) powinny uwzględniać w kalkulacjach rezerw to rozszerzone ryzyko. Oznacza to, że idea Solvency II polega na ściślejszym uzależnieniu wysokości kapitału od wielkości ryzyka podejmowanego przez firmy ubezpieczeniowe. Innymi słowy kapitał ma wystarczyć na pokrycie rzeczywistego ryzyka, a wyceny należy dokonywać na podstawie ich bieżącej wartość zbycia, tzn. wartość ta powinna odpowiadać bieżącej (zaktualizowanej) kwocie, którą zakład musiałyby zapłacić, gdyby dokonywał natychmiastowego przeniesienia swoich praw i zobowiązań umownych na inny zakład.

Zgodnie z Solvency II najlepsze oszacowanie rezerw to zdyskontowana wartość wszystkich przyszłych przepływów pieniężnych. W przypadku polis z opcjami dodatkowymi rodzaj i wielkość przyszłych świadczeń determinuje status polisy ubezpieczeniowej, dlatego też ubezpieczyciel powinien uwzględnić dodatkowo historię procesu aktywizacji opcji w dokonywanych kalkulacjach. Zatem wycena rezerw sporządzona na podstawie najlepszego oszacowania przyszłych strumieni pieniężnych z uwzględnieniem dyskontowania powinna być oparta na wartości rynkowej całkowitego ryzyka objętego umową, tzn. z uwzględnieniem filtracji określającej pełną informację dostępną w chwili t dotyczącą procesu aktywizacji opcji, co oznacza konieczność uwzględnienia warunkowej wartości oczekiwanej. Uwzględniając ten aspekt, najlepsze oszacowanie rezerw matematycznych składek w momencie t trwania umowy ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi to ważona prawdopodobieństwem średnia przyszłych przepływów pieniężnych przy uwzględnieniu zmiany wartości pieniądza w czasie i aktywnej i-tej opcji polisy. Oznacza to, że rezerwy dla tego typu ubezpieczeń to następująca warunkowa wartość oczekiwana:

$$\begin{aligned} V_i(t) &= E[PV_t^F(\mathcal{T})|\mathcal{L}_t \wedge \mathcal{G}_t \wedge \mathcal{H}_t] \\ &= E\Big(\int_{\mathrm{t}}^{n\vee\infty} e^{-\delta(\tau-t)}dF(\tau)\, \Big| \sigma(\mathbb{I}(\mathrm{T} > \mathrm{t}), 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{n}) \wedge X(t) = i\Big). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Następnie wiedząc, że na strumień płatności $F(t)$ składają się przepływy pieniężne pomiędzy ubezpieczycielem a ubezpieczonym charakterystyczne dla ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi (rozdział 3.3), oraz stosując do opisu procesu aktywizacji opcji procesy Markowa (rozdział 2.5), rezerwy matematyczne składek to:

$$\begin{aligned} V_i(t) &= \\ &\sum_{j\in S}\int_{\mathrm{t}}^{n\vee\infty} e^{-\delta(\tau-t)}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij} d\big(R_j(\tau) + D_j(\tau) - \Pi_j(\tau)\big) \\ &+ \sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{t}^{n\vee\infty} e^{-\delta(\tau-t)} \mathrm{c}_{jk}(\tau)\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Przyjmując, że ubezpieczony opłaca składki tylko wtedy, gdy jest zdrowy, czyli gdy polisa ma aktywny stan H, i dokonując prostych przekształceń powyższego wzoru, otrzymuje się wzór na rezerwę matematyczną składek w ubezpieczeniu z opcjami dodatkowymi jako sumę dwóch wielkości obejmujących świadczenia z umowy podstawowej UŻ + UD i opcji dodatkowych.

$$V_i(t) =$$

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} c_{jD}(\tau)\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\mu_{jD}(x+\tau)d\tau}_{\text{UŻ}} + \underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\,dD_j(\tau)}_{\text{UD}}}_{\text{umowa podstawowa}}$$

$$+\underbrace{\underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\,dR_j(\tau)}_{\text{renta}} + \underbrace{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j\wedge k\neq D}\int_0^n e^{-\delta(\tau-t)} c_{jk}(\tau)\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau}_{\text{świadczenie z tytułu zajścia zdarzenia losowego}}}_{\text{opcje dodatkowe}}$$

$$-\underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\; {}_{\tau-t}p^{iH}_{x+t}\,d\Pi_H(\tau)}_{\text{przyszłe składki}}. \tag{6.4}$$

Przy zastosowaniu wzorów na wartości aktuarialne poszczególnych strumieni płatności, rezerwa matematyczna składek dla ubezpieczeń z opcjami dodatkowymi wyraża się następującym wzorem:

$$V_i(t) =$$

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} c_{jD}(\tau)\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\mu_{jD}(x+\tau)d\tau}_{\text{UŻ}} + \underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\,d_j(\tau)d\tau}_{\text{UD}}}_{\text{umowa podstawowa}}$$

$$+\underbrace{\underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\,r_j(\tau)\lceil d\tau\rceil}_{\text{renta}} + \underbrace{\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j\wedge k\neq D}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} c_{jk}(\tau)\; {}_{\tau-t}p^{ij}_{x+t}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau}_{\text{świadczenie z tytułu zajścia zdarzenia losowego}}}_{\text{opcje dodatkowe}}$$

$$-\underbrace{\sum_{j\in S}\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\; {}_{\tau-t}p^{iH}_{x+t}\,\pi_H(\tau)\lfloor d\tau\rfloor}_{\text{przyszłe składki}}.$$

Wzór ten stanowi uogólnienie wzoru na rezerwę matematyczną składek w tradycyjnych ubezpieczeniach na życie (Scott 1999, Błaszczyszyn, Rolski 2004), jak również wzoru na rezerwę matematyczną składek ubezpieczenia wielorakiego (Norberg 1999, Wolthuis 2003, Homa 2004). Na podstawie ostatniego z przedstawionych wzorów można stwierdzić, że firma ubezpieczeniowa, tworząc rezerwę matematyczną, powinna uwzględniać zarówno ryzyko wynikające z umowy podstawowej, jak i umów dodatkowych.

Co ważne, aktywna opcja polisy wpływa przede wszystkim na rodzaj i realizację przyszłych strumieni płatności, a tym samym na rząd wielkości wymaganych rezerw. Uwzględniając dodatkowo fakt, że składka ubezpieczeniowa w tego typu ubezpieczeniach o złożonej strukturze to suma dwóch składowych wynikających z umowy podstawowej i opcji dodatkowych, można wskazać, że firma ubezpieczeniowa oferująca opcje dodatkowe do umów podstawowych tradycyjnego ubezpieczenia na życie i dożycie powinna zwiększać swoje rezerwy o tzw. **kapitał podwyższonego ryzyka** stanowiący różnicę pomiędzy wartością rezerw ubezpieczenia tradycyjnego a ubezpieczenia o rozszerzonym ryzyku. Zatem ubezpieczyciel powinien uwzględniać w kalkulacjach dodatkowy aspekt ryzyka aktuarialnego wynikającego z rozszerzonej ochrony ubezpieczeniowej tego typu umów. Kluczowy aspekt w tym zakresie dotyczy konieczności ustalenia tzw. kapitału podwyższonego ryzyka, który ma wystarczyć na pokrycie rzeczywistego, podwyższonego ryzyka ubezpieczeniowego objętego ochroną. Kapitał podwyższonego ryzyka jest więc równy:

$$\begin{aligned} & KPV_i(t) = \\ & \sum_{j\in S}\int_{\mathrm{t}}^{n} e^{-\delta(\tau-\mathrm{t})}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij} r_j(\tau)[d\tau] \\ & +\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j\wedge k\neq D}\int_{0}^{n} e^{-\delta(\tau-\mathrm{t})}\mathrm{c}_{jk}(\tau)\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau \\ & -\sum_{j\in S}\int_{\mathrm{t}}^{n} e^{-\delta(\tau-t)}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij} d\Pi_j^{o}(\tau), \end{aligned} \tag{6.5}$$

gdzie $\Pi_j^o(\tau)$ to część składki na pokrycie ryzyka dodatkowego.

Zatem ubezpieczyciel, chcąc zabezpieczyć się przed nieprzewidzianymi stratami, na podstawie wyceny przepływów pieniężnych powinien ustalić odpowiedni poziom rezerw, które powinny zrównoważyć ponoszone przez niego ryzyko. Aby ten cel osiągnąć w przypadku złożonych produktów ubezpieczeniowych, do których zalicza się ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi, należy w kalkulacjach wysokości wymaganych rezerw uwzględnić **rozszerzone ryzyko** wynikające z opcji dodatkowych.

6.2. Równanie różniczkowe rezerw matematycznych składek

Rezerwy matematyczne składek spełniają równanie różniczkowe rezerw nazywane równaniem różniczkowym Thielego. Znane są równania różniczkowe rezerw matematycznych składek dla tradycyjnych ubezpieczeń życiowych (Gerber 1995), jak i ubezpieczeń wieloopcyjnych, ale nieuwzględniających wszystkich strumieni płatności (Norberg 1995, Milbrodt, Stracke 1997, Haberman, Pitacco 1999). Przedstawione poniżej równanie jest ich odpowiednikiem z uwzględnieniem wszystkich możliwych strumieni płatności i wykorzystywanej w zapisie całki Riemanna-Stjeltiesa. Ze względu na to, że strumienie płatności związane z aktywną opcją ubezpieczenia oznaczone odpowiednio $\Pi_i(t)$, $C_i(t)$ i $D_i(t)$ mają „skoki", uzyskane równanie to w rzeczywistości różniczkowa forma równań Thielego, a nie faktycznie równanie różniczkowe.

Rezerwy matematyczne składek w ubezpieczeniu złożonym o rozszerzonym ryzyku, określone wzorem (6.3) spełniają następujący układ równań:

$$dV_i(t) = \delta V_i(t)dt - \sum_j R_{ij}(t)\mu_{ij}(t)dt + d\big(\Pi_i(t) - R_i(t) - D_i(t)\big).$$

Równanie to ma prostą interpretację. Mianowicie przyrost rezerw matematycznych związanych z aktywną opcją i, w czasie $(t, t+dt]$ związany jest z dochodem z tytułu odsetek od rezerw, jakimi dysponował ubezpieczyciel w chwili oraz z tytułu wpłaconych w tym okresie składek w wysokości $d\Pi_i(\tau)$, pomniejszony o wypłacone świadczenia w wysokości $d\big(R_i(\tau) + D_i(\tau)\big)$ związane z aktywną i-tą opcją ubezpieczenia oraz pomniejszone o koszt ubezpieczyciela związany z przejściem procesu aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t\in T}$ ze stanu i do j, wynoszący odpowiednio $R_{ij}(t) = V_j(t) - V_i(t) + c_{ij}(t)$, nazywany ryzykiem.

Dowód

Rezerwy matematyczne składek w ubezpieczeniu z opcjami dodatkowymi zgodnie ze wzorem (6.3) wyrażone są wzorem:

$$V_i(t) =$$

$$\sum_{j\in S}\int_{\mathrm{t}}^{n\vee\infty} e^{-\delta(\tau-t)}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\, d\left(R_j(\tau) + D_j(\tau) - \Pi_j(\tau) + \sum_{k\neq j} \mathrm{c}_{jk}(\tau)\mu_{jk}(x+\tau)d\tau\right).$$

Mnożąc powyższe równanie przez $e^{-\delta\mathrm{t}}\ {}_tp_x^{li}$ i sumując po wszystkich możliwych stanach i otrzymuje się następującą jego postać:

$$\sum_i e^{-\delta\mathrm{t}}\ {}_tp_x^{li} V_i(t) =$$

$$\int_{\mathrm{t}}^{n\vee\infty} e^{-\delta\tau}\sum_{j\in S}\sum_i\ {}_tp_x^{li}\ {}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\left(d\left(R_j(\tau) + D_j(\tau) - \Pi_j(\tau)\right) + \sum_{k\neq j}\mathrm{c}_{jk}(\tau)\mu_{jk}(x+\tau)d\tau\right)$$

$$= \int_{\mathrm{t}}^{n\vee\infty} e^{-\delta\tau}\sum_{j\in S}\sum_i\ {}_\tau p_x^{lj}\left(d\left(R_j(\tau) + D_j(\tau) - \Pi_j(\tau)\right) + \sum_{k\neq j}\mathrm{c}_{jk}(\tau)\mu_{jk}(x+\tau)d\tau\right).$$

Pochodna funkcji $\sum_i e^{-\delta\mathrm{t}}\ {}_tp_x^{li} V_i(t)$ występującej po lewej stronie powyższego równania jest następującej postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i e^{-\delta t}\,{}_tp_x^{li}V_i(t)\right) =$$

$$\sum_i \left({}_tp_x^{li}V_i(t)de^{-\delta t} + e^{-\delta t}V_i(t)d\,{}_tp_x^{li} + e^{-\delta t}\,{}_tp_x^{li}dV_i(t)\right) =$$

$$e^{-\delta t}\sum_i\left(-\delta\,{}_tp_x^{li}V_i(t)dt + V_i(t)\sum_j\left({}_tp_x^{li}\mu_{ij}(t) - {}_tp_x^{lj}\mu_{ji}(t)\right)dt + {}_tp_x^{li}dV_i(t)\right) =$$

$$e^{-\delta t}\sum_i {}_tp_x^{li}\left(-\delta V_i(t)dt + \sum_j\left(V_i(t) - V_j(t)\right)\mu_{ij}(t)\,dt + dV_i(t)\right).$$

Odpowiednio pochodna po *t* strony prawej równania wynosi:

$$\frac{d}{dt}\int_t^{n\vee\infty} e^{-\delta\tau}\sum_{j\in S}\sum_i {}_\tau p_x^{lj}\left(d\left(R_j(\tau) + D_j(\tau) - \Pi_j(\tau)\right) + \sum_{k\neq j} c_{jk}(\tau)\mu_{jk}(x+\tau)d\tau\right)$$

$$= e^{-\delta t}\sum_i {}_tp_x^{li}\left(d\left(R_i(t) + D_i(t) - \Pi_i(t)\right) + \sum_{j\neq i} c_{ij}(t)\mu_{ij}(x+t)dt\right).$$

Stąd

$$e^{-\delta t}\sum_i {}_tp_x^{li}\left(dV_i(t) - \delta V_i(t)dt + \sum_{j\neq i}\left(V_i(t) - V_j(t) - c_{ij}(t)\right)\mu_{ij}(t)\,dt\right.$$

$$\left. - d\left(R_i(t) + D_i(t) - \Pi_i(t)\right)\right) = 0.$$

Przekształcając powyższe równanie, otrzymuje się równanie Thielego.

6.3. Obliczanie rezerw matematycznych dla wybranych ubezpieczeń z opcjami dodatkowymi

W rozdziale tym dokonano analizy wielkości rezerw matematycznych dla ubezpieczenia tradycyjnego i złożonego z opcjami dodatkowymi, jakie powinna tworzyć firma ubezpieczeniowa. W tego typu ubezpieczeniach aktualny status polisy determinuje zarówno rodzaj, jak i wielkość przyszłych przepływów pieniężnych, dlatego też zbadano wymagany poziom rezerw w przykładowych polisach ubezpieczenia jako funkcję czasu i aktywnej opcji ubezpieczenia. Własności tych funkcji zbadano dla przykładowych ubezpieczeń:

1. tradycyjnego ubezpieczenia na życie (UŻ, UD),
2. złożonego (UŻ, UD) z opcją dodatkową powszechnie nazywaną nieszczęśliwy wypadek (NW), w tym przypadku uwzględniono opcje NW_ADI oraz NW_AI.

Rezerwa matematyczna składek jest obliczana przez ubezpieczyciela dla dowolnego momentu czasu trwania umowy ubezpieczenia jako odpowiednia warunkowa wartość oczekiwana przyszłych przepływów pieniężnych. W przypadku rozpatrywanego tradycyjnego ubezpieczenia, którego model probabilistyczny jest modelem dwustanowym z jednym stanem pochłaniającym, ubezpieczyciel powinien dysponować rezerwą matematyczną składek równą:

$$V(t) = \begin{cases} 0 & gdy\, X(t) = D \\ V_H(t) & gdy\, X(t) = H \end{cases}.$$

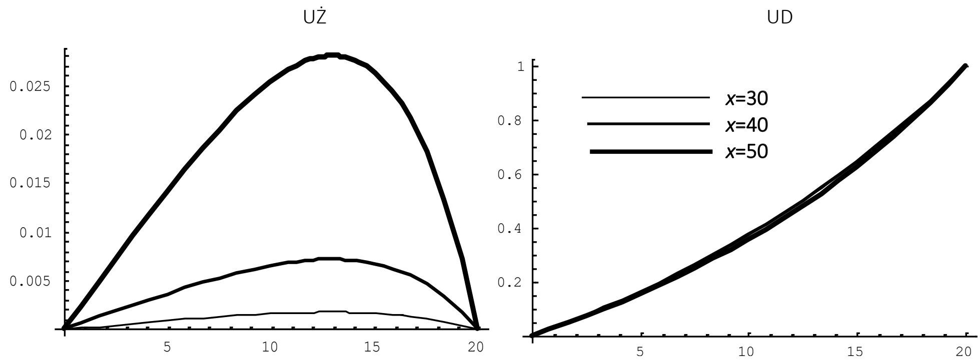
Status polisy *D* to tzw. stan pochłaniający, czyli w momencie jego aktywizacji kończy się ochrona ubezpieczeniowa, co oznacza, że rezerwa matematyczna składek jest wówczas równa zero, dlatego też w przypadku tradycyjnych ubezpieczeń rezerwy matematyczne składek związane są jedynie ze stanem *H*.

Zatem jeśli w momencie trwania ubezpieczenia aktywna jest opcja (*H*), czyli ubezpieczony opłaca składki, wymagany poziom rezerw należy wyznaczyć zgodnie z ogólnym wzorem (6.4), który w tym przypadku ma postać:

$$V_H(t) = \underbrace{c\int_t^{n\vee\infty} e^{-\delta(\tau-t)}{}_{\tau-t}p_{x+t}^{HH}\mu(x+\tau)d\tau}_{\substack{jednorazowe\ świadczenie \\ z\ tytułu\ śmierci\ ubezpieczonego}} + \underbrace{de^{-\delta(n-t)}{}_{n-t}p_{x+t}^{HH}}_{\substack{jednorazowe\ świadczenie \\ z\ tytulu\ dożycia \\ końca\ okresu\ ubezpieczenia}}$$

$$-\underbrace{\pi\int_t^{n\vee\infty} e^{-\delta(\tau-t)}{}_{\tau-t}p_{x+t}^{HH}d\tau}_{przyszłe\ składki}.$$

Powyższy wzór można wykorzystać do ustalenia wymaganego poziomu rezerw matematycznych składek zarówno w ubezpieczeniu na życie (UŻ), jak też na dożycie (UD), uwzględniając specyfikę strumieni płatności związanych z danym rodzajem ubezpieczenia. Wyznaczone funkcje rezerw prospektywnych dla ubezpieczenia tradycyjnego w dwóch wariantach: UŻ i UD zawartego z ubezpieczonym w wieku wstępu równym odpowiednio $x = 30, 40, 50$, przedstawiono na rysunku 6.1.



Rysunek 6.1. Funkcje rezerw matematycznych składek dla ubezpieczenia UŻ i UD
Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie powyższych wyników można ubezpieczenia klasyczne podzielić na ubezpieczenia o zerowej rezerwie końcowej oraz na ubezpieczenia o dodatniej rezerwie końcowej. Do ubezpieczeń pierwszego typu zaliczyć należy ubezpieczenia na życie (UŻ), w przypadku którego rezerwy są rosnąco-malejącą funkcją czasu o zerowej rezerwie początkowej i końcowej. Natomiast do grupy drugiej zaliczyć można ubezpieczenia na dożycie (UD) oraz ubezpieczenia na życie i dożycie (UŻD). W obu tych ubezpieczeniach rezerwy są rosnącą funkcją czasu o zerowej rezerwie początkowej i dodatniej rezerwie końcowej.

Jako drugi przykład przeanalizowano kontrakt terminowy n-letniego ubezpieczenia podstawowego na życie UŻ lub dożycie UD wraz z opcjami dodatkowymi NW_AI oraz NW_ADI dotyczącymi następstw nieszczęśliwych wypadków. Podstawą do obliczeń wielkości wymaganych rezerw w dowolnym momencie t trwania umowy są przyszłe przepływy pieniężne. Wartość zaktualizowaną oraz aktuarialną przepływów charakterystycznych dla tego typu ubezpieczenia opisano w rozdziale 3, a jego strukturę probabilistyczną przedstawiono w rozdziale 2.

Poziom wymaganych rezerw matematycznych składek w ubezpieczeniu z opcjami dodatkowymi zależy od rodzaju przyszłych płatności, jak również od statusu polisy, czyli aktywnej opcji. Dlatego też ubezpieczyciel w celu pokrycia przyszłych świadczeń powinien dysponować rezerwą matematyczną składek równą odpowiednio:

$$V(t) = \begin{cases} 0 & gdy\ X(t) = D \vee X(t) = ADI \\ V_H(t) & gdy\ X(t) = H \\ V_{AI}(t) & gdy\ X(t) = AI \end{cases} .$$

Opcja dodatkowa ADI oraz status polisy D to tzw. stany pochłaniające, czyli wiążące się z zakończeniem ochrony ubezpieczeniowej i dlatego też rezerwy matematyczne składek są wówczas równe zero.

Natomiast jeżeli w chwili t ubezpieczony jest zdrowy i opłaca składki, co oznacza, że polisa ma status oznaczony H, lub uległ wypadkowi i aktywna jest opcja dodatkowa ubezpieczenia AI, ubezpieczyciel musi tworzyć odpowiedniej wysokości fundusz rezerw. Zatem wymagany poziom rezerw matematycznych składek tzw. rezerw prospektywnych, gdy aktywna opcja polisy to $X(t) = H$, należy wyznaczyć ze wzoru:

$$V_H(t) =$$

$$\underbrace{c\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}\left({}_{\tau-t}p_{x+t}^{HH}\mu(x+\tau) + {}_{\tau-t}p_{x+t}^{HAI}\right)\nu(x+\tau)d\tau}_{\text{świadczenia z umowy podstawowej UŻ}}$$

$$+ \underbrace{de^{-\delta\cdot(n-t)}\left({}_{n-t}p_{x+t}^{HH} + {}_{n-t}p_{x+t}^{HAI}\right)}_{\text{świadczenia z umowy podstawowej UD}}$$

$$+ \underbrace{(2+\beta)c\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}{}_{\tau-t}p_{x+t}^{HH}\sigma(x+\tau)d\tau + r\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}{}_{\tau-t}p_{x+t}^{HAI}d\tau}_{\text{wartość przyszłych świadczeń z umowy dodatkowej}}$$

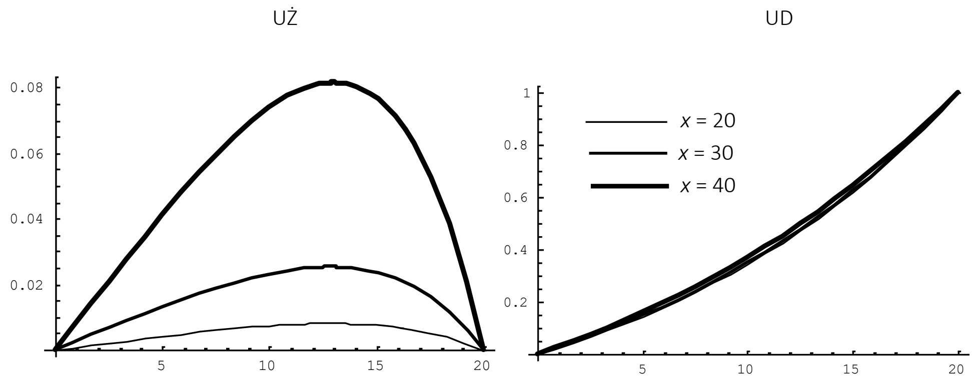
$$- \underbrace{\pi\int_t^n e^{\delta\cdot(\tau-t)}{}_{\tau-t}p_{x+t}^{HH}d\tau}_{\text{oczekiwana wartość przyszłych składek}}$$

lub

$$V_{AI}(t) =$$

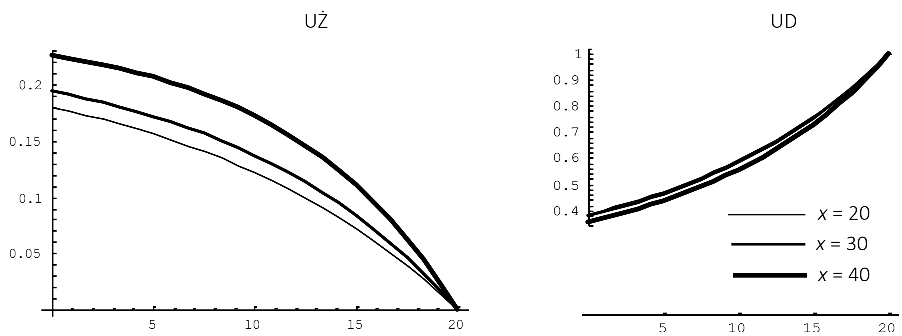
$$\underbrace{c\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}{}_{\tau-t}p_{x+t}^{HAI}\nu(x+\tau)d\tau + de^{-\delta\cdot(n-t)}{}_{n-t}p_{x+t}^{AIAI} + r\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}{}_{\tau-t}p_{x+t}^{AIAI}d\tau}_{\text{oczekiwana wartość przyszłych świadczeń}}.$$

Powyższe wzory wskazują na to, że w przypadku umowy z opcjami dodatkowymi przy kalkulacji rezerw matematycznych należy uwzględnić aktywną opcję polisy, która ma wpływ na przyszłe przepływy pieniężne, a tym samym na wielkość wymaganych rezerw matematycznych składek. Na podstawie przedstawionych wzorów wyznaczono rezerwy matematyczne składek, jakie powinien posiadać ubezpieczyciel, jeśli ubezpieczony jest zdrowy (stan H) lub chory (stan AI), dla ubezpieczeń UŻ i UD z opcjami dodatkowymi oznaczonymi NW_AI oraz NW_ADI. Rezerwy te jako funkcję czasu i wieku ubezpieczonego oznaczone odpowiednio $V_H(t, x)$ i $V_{AI}(t, x)$ przedstawiono na poniższych wykresach.



Rysunek 6.2. Funkcje rezerw matematycznych składek dla ubezpieczenia złożonego UŻ i UD z opcją NW_AI + ADI

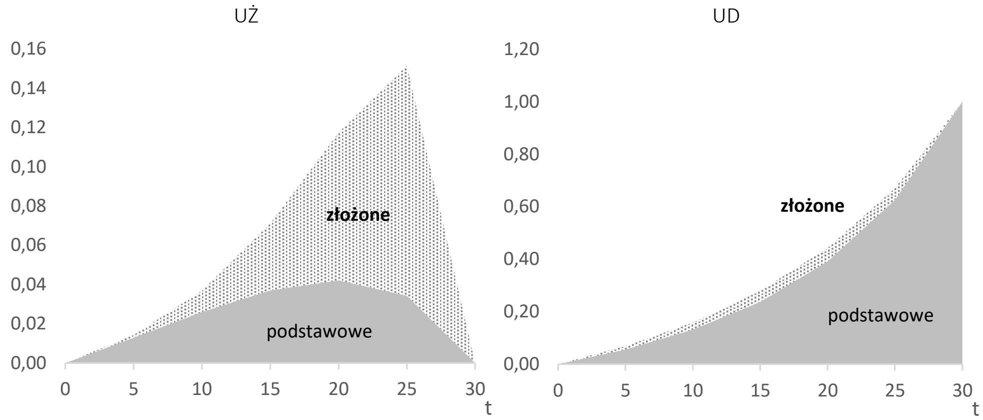
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 6.3. Funkcje rezerw matematycznych składek dla ubezpieczenia złożonego UŻ i UD z opcją NW_AI + ADI

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie przedstawionych na powyższych rysunkach wykresów można stwierdzić, że podstawowa opcja (stan *H*) nie zmienia kształtu funkcji rezerw w danej grupie ubezpieczeń, tzn. ubezpieczenia na życie z opcją dodatkową pozostają ubezpieczeniami o zerowych rezerwach końcowych, zaś UD wraz z opcją dodatkową są nadal ubezpieczeniami o dodatniej rezerwie końcowej. Natomiast w przypadku rezerw związanych z aktywizacją opcji dodatkowej (stan *AI*) funkcja rezerw zarówno dla ubezpieczenia UŻ, jak i UD zmienia się i jest odpowiednio malejącą i rosnącą funkcją czasu o niezerowej rezerwie początkowej. Z drugiej strony uzyskane wyniki potwierdzają, że dodatkowe płatności związane z tymi samymi opcjami nie mają wpływu na kształt funkcji rezerw, a jedynie na rząd ich wielkości, co zilustrowano na rysunku 6.4.



Rysunek 6.4. Porównanie wysokości wymaganej podstawowej rezerwy matematycznej składek w ubezpieczeniu podstawowym i złożonym UŻ i UD

Źródło: opracowanie własne.

7. Analiza szkodowości i ryzyko portfela

7.1. Proces nadwyżki finansowej

Istotą analizy aktuarialnej jest stworzenie podstaw do prowadzenia działalności umożliwiającej ubezpieczycielowi zabezpieczenie jego wypłacalności w przyszłości. Zatem kolejny istotny aspekt analizy dotyczy aspektu ryzyka ubezpieczeniowego związanego z działalnością ubezpieczyciela, która w szczególności obejmuje **analizę „szkodowości”**. Przedmiotem takiej analizy jest zbadanie procesu straty nazywanej również nadwyżką finansową ubezpieczyciela. Proces ten powinien być postrzegany jako dający ważną informację o ryzyku finansowym związanym ze złożonym ubezpieczeniem, jakim jest ubezpieczenie na życie i dożycie powiązane z opcjami dodatkowymi. Proces straty określony jest jako różnica między wydatkami ubezpieczyciela a jego dochodami (Chrzan 1998b, Błaszczyszyn, Rolski 2004). Natomiast uwzględniając specyfikę ubezpieczeń złożonych na życie i dożycie z opcjami dodatkowymi, przy określeniu tego procesu należałoby również uwzględnić różnicę rezerw matematycznych składek. Są to bowiem środki gromadzone przez ubezpieczyciela, ale stanowiące własność osób ubezpieczonych, co oznacza, że firma ubezpieczeniowa jedynie dysponuje nimi w okresie trwania umowy i tym samym zyskiem jest dopiero zwalniana rezerwa matematyczna składek. Ponadto wysokość rezerwy matematycznej składek jest zdeterminowana przez aktywną w danym momencie opcję, co oznacza, że ubezpieczyciel w zależności od realizacji procesu aktywizacji opcji powinien zabezpieczać inną jej wartość.

Tak określony proces nazywany będzie **procesem nadwyżki finansowej lub straty ubezpieczyciela.** Zatem wartość zaktualizowana na moment *t* straty ubezpieczyciela poniesionej w okresie $\mathcal{T}$ wyrażona jest następującym wzorem:

$$ZL_t(\mathcal{T}) = \sum_{j\in S}\left(\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}d\left(R_j(\tau)+D_j(\tau)-\Pi_j(\tau)\right) + \sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)}c_{jk}(\tau)dN_{jk}(t)\right) + e^{-\delta(\tau-t)}\Delta V_{X(t)}(t)\,. \tag{7.1}$$

Przyjmując $\mathcal{T} = (\mathrm{t}, \mathrm{s}]$, otrzymuje się równoważną jego postać:

$$ZL_t(t,s) = ZL(t,s) =$$

$$\sum_{j \in S} \left(\int_t^s e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} d\left(R_j(\tau) + D_j(\tau) - \Pi_j(\tau)\right) \right.$$
$$\left. + \sum_{k \neq j} \int_t^s e^{-\delta(\tau - t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(t) \right) + e^{-\delta(s-t)} V_{X(t)}(s) - V_{X(t)}(t). \tag{7.2}$$

Zgodnie z powyższym wzorem zaktualizowana wartość straty ubezpieczyciela równa jest łącznym przepływom pieniężnym powiększonym o rezerwę, jaką powinien dysponować ubezpieczyciel na koniec okresu, i pomniejszoną o rezerwę zwalnianą w momencie t (wymaganą w chwili s trwania umowy) stanowiącą dochód ubezpieczyciela. Należy zauważyć, że losowość tego procesu wynika z losowości procesu uwzględniającego wszystkie rodzaje płatności. Uwzględniając zaktualizowaną wartość łącznych przepływów pieniężnych (rozdział 3), stratę ubezpieczyciela można zapisać w równoważnej postaci:

$$ZL(t,s) = \int_{\mathrm{t}}^s e^{-\delta(\tau - t)} dF(\tau) + e^{-\delta(s-t)} V_{X(t)}(s) - V_{X(t)}(t). \tag{7.3}$$

Zbadanie procesu straty umożliwi firmie ubezpieczeniowej określenie opłacalności ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi pod względem finansowym, jak również pozwoli zbadać szkodowość portfela takich polis. Przyjmując $s \cong n$, wzór określa przyszłą stratę ubezpieczyciela wynikającą z zawartej umowy. Po jednoczesnym uwzględnieniu rodzajów strumieni finansowych związanych z ubezpieczeniem z opcjami dodatkowymi, proces ten wyraża się następującym wzorem:

$$ZL(t,n) =$$

$$\sum_{j \in S} \int_t^n e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} d\left(R_j(\tau) + D_j(\tau)\right)$$
$$+ \sum_{j \in S} \sum_{k \neq j} \int_t^n e^{-\delta(\tau - t)} \mathrm{c}_{jk}(\tau) d\mathrm{N}_{jk}(t) \tag{7.4}$$
$$- \sum_{j \in S} \int_t^n e^{-\delta(\tau - t)} \mathbb{I}\{T > \tau\} \mathbb{I}\{X(\tau) = j\} d\Pi_j(\tau) + e^{-\delta(n-t)} V_{X(n)}(n) - V_{X(t)}(t).$$

Pierwsze dwa składniki sumy w powyższym wzorze stanowią wydatki firmy ubezpieczeniowej wynikające z zawartej umowy ubezpieczenia. Pierwszy składnik to zaktualizowana wartość rent oraz jednorazowych świadczeń wypłacanych przez ubezpieczyciela z tytułu dożycia, zaś drugie wyrażenie to zaktualizowana wartość wypłacanych sum ubezpieczenia z tytułu zajścia różnych przypadków życiowych. Trzeci składnik stanowi wielkość zaktualizowaną składek płaconych przez ubezpieczonego, natomiast dwa ostatnie składniki to różnica wielkości wymaganych rezerw na początku i końcu badanego okresu. Wysokość zwalnianych rezerw stanowi dochód ubezpieczyciela i ich wielkość wynosi $V_{X(t)}(t)$, natomiast na koniec okresu ubezpieczenia firma ubezpieczeniowa powinna dysponować rezerwą w wysokości $V_{X(n)}(n)$. W przypadku gdy umowa podstawowa jest umową na życie (UŻ), rezerwa ta jest równa zero, natomiast w przypadku umów na dożycie (UD) oraz na życie i dożycie (UŻD) rezerwa ta jest dodatnia.

Otrzymany wzór ma łatwą interpretację, jednak taka jego postać utrudnia badanie rozkładu procesu nadwyżki finansowej i określenie jego podstawowych charakterystyk funkcyjnych. Dlatego też proces ten przedstawiony będzie w postaci, która umożliwi zbadanie jego własności. Korzystając z równania różniczkowego rezerw tzw. równania różniczkowego Thielego danego wzorem (6.6), otrzymuje się następującą postać straty ubezpieczyciela:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ZL}(t,s) = \\
&\sum_{j\in S}\int_t^s e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}\left(\delta V_j(\tau)-\frac{dV_j(\tau)}{d\tau}\right)d\tau \\
&+\sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_t^s e^{-\delta(\tau-t)}\big(\mathrm{c}_{jk}(\tau)d\mathrm{N}_{jk}(\tau) \\
&-\mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)d\tau\big)+e^{-\delta(s-t)}V_{X(t)}(s)-V_{X(t)}(t).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Ponieważ proces aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t\in T}$ jest procesem Markowa, to ma skoki w momentach $t \le T_0 < T_1 < T_2 < \cdots T_f \le s$ tworzących rosnący porządek czasów zatrzymania procesu i niech i_k oznacza stan procesu w chwili T_k. Wówczas pierwszy składnik wzoru (7.5) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in S}\int_t^s e^{-\delta(\tau-t)}\mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}\left(\delta V_j(\tau)-\frac{dV_j(\tau)}{d\tau}\right)d\tau = \\
&\sum_{k=0}^{f} e^{\delta t}\int_{T_k}^{T_{k+1}} e^{-\delta\tau}\left(\delta V_{i_k}(\tau)-\frac{d}{d\tau}V_{i_k}(\tau)\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Całkę w powyższym wzorze oblicza się, wykorzystując następujące całkowanie przez części:

$$\int_a^b \upsilon(\tau)\left(\delta f(\tau) - \frac{d}{d\tau} f(\tau)\right) d\tau = \delta \int_a^b \upsilon(\tau) f(\tau) d\tau - \int_a^b \upsilon(\tau) \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau =$$

$$\left| \begin{matrix} u = \upsilon(\tau) = e^{-\delta\tau} & u' = -\delta e^{-\delta\tau} \\ \nu' = f'(\tau) & \nu = f(\tau) \end{matrix} \right|$$

$$= \delta \int_a^b e^{-\delta\tau} f(\tau) d\tau - \left(e^{-\delta\tau} f(\tau)\Big|_a^b - \int_a^b -\delta e^{-\delta\tau} f(\tau) d\tau \right)$$

$$= \delta \int_a^b e^{-\delta\tau} f(\tau) d\tau - e^{-\delta b} f(b) + e^{-\delta a} f(a) - \delta \int_a^b e^{-\delta\tau} f(\tau) d\tau$$

$$= e^{-\delta a} f(a) - e^{-\delta b} f(b).$$

Zatem zgodnie z całkowaniem przez części wzór (7.6) przyjmuje następującą postać:

$$\sum_{k=0}^{f} e^{\delta t} \int_{T_k}^{T_{k+1}} e^{-\delta\tau} \left(\delta V_{i_k}(\tau) - \frac{d}{d\tau} V_{i_k}(\tau) \right) d\tau =$$

$$\sum_{k=0}^{f} e^{\delta t} \left(e^{-\delta T_k} V_{i_k}(T_k) - e^{-\delta T_{k+1}} V_{i_k}(T_{k+1}) \right)$$

$$= e^{-\delta(T_0 - t)} V_{i_0}(T_0) + e^{\delta t} \sum_{k=1}^{f} \left(e^{-\delta T_k} V_{i_k}(T_k) - e^{-\delta T_k} V_{i_{k-1}}(T_k) \right)$$

$$- e^{-\delta(T_f - t)} V_{i_f}(T_{f+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{f} e^{-\delta(T_k - t)} \left(V_{i_k}(T_k) - V_{i_{k-1}}(T_k) \right) + V_{X(t)}(t) - e^{-\delta(s-t)} V_{X(s)}(s)$$

$$= \sum_{j} \sum_{k \neq j} \int_t^s e^{-\delta(\tau - t)} \left(V_k(\tau) - V_j(\tau) \right) dN_{jk}(\tau) + V_{X(t)}(t)$$

$$- e^{-\delta(s-t)} V_{X(s)}(s).$$

Podstawiając otrzymany wynik do wzoru (7.5), otrzymuje się następującą postać straty:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = \sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{t}^{s} e^{-\delta(\tau-t)}\Big(V_k(\tau)-V_j(\tau)+\mathrm{c}_{jk}(\tau)\Big)\Big(dN_{jk}(\tau) - \mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}\mu_{jk}(\tau)d\tau\Big). \tag{7.7}$$

Wzór ten można też przedstawić w postaci:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = \sum_{j\in S}\sum_{k\neq j}\int_{t}^{s} e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{R}_{jk}(\tau)\big(dN_{jk}(\tau) - \mathbb{I}\{T>\tau\}\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}\mu_{jk}(\tau)d\tau\big). \tag{7.8}$$

Przyjmując oznaczenie straty związanej z określoną aktywną opcją polisy jako $\mathrm{ZL}_j(t,s)$ powyższy wzór można zapisać następująco:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = \sum_{j\in S}\mathrm{ZL}_j(t,s).$$

Fakt, że proces aktywizacji opcji $\{X(t)\}_{t\in T}$ to ciągły w czasie łańcuch Markowa, oznacza, że ma on skoki w momentach tworzących rosnący porządek czasów zatrzymania. Niech więc i_k oznacza stan procesu w chwili T_k. Wówczas strata wyraża się wzorem:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = \sum_{j=0}\mathrm{ZL}_{i_j}\big(T_j,T_{j+1}\big) =$$

$$\sum_{j=0}^{f}\sum_{k\neq j}\int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{R}_{jk}(\tau)\big(dN_{jk}(\tau) - \mathbb{I}\{X(\tau)=j\}\mu_{jk}(\tau)d\tau\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{f}\sum_{k\neq j}\int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{R}_{jk}(\tau)dN_{jk}(\tau)$$

$$-\sum_{j=0}^{f}\sum_{k\neq j}\int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{R}_{jk}(\tau)\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}\mu_{jk}(\tau)d\tau.$$

Proces liczący $\{N_{jk}(\tau)\}$ zlicza przejścia z j do k, przejście to nastąpi w chwili T_{j+1}, natomiast indykator $\mathbb{I}\{X(\tau)=j\}$ dla $t\in\big(T_j,T_{j+1}\big]$ przyjmuje wartość 1, stąd powyższy wzór przyjmuje postać:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = \sum_{j=0}^{f}\sum_{k\neq j} e^{-\delta(T_{j+1}-t)}\mathrm{R}_{jk}(T_{j+1}) - \sum_{j=0}^{f}\sum_{k\neq j}\int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\delta(\tau-t)}\mathrm{R}_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)d\tau.$$

Po podstawieniu równania różniczkowego rezerw wzór ten przyjmuje postać:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = \sum_{j=0}^{f}\sum_{k\neq j} e^{-\delta(T_{j+1}-t)}\mathrm{R}_{jk}(T_{j+1}) - \sum_{j=0}^{f}\int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\delta(\tau-t)}\left(\left(\delta V_j(\tau)-V_j'(\tau)\right)d\tau + d\left(\Pi_j(\tau)-R_j(\tau)-D_j(\tau)\right)\right).$$

Całkę ograniczoną z funkcji postaci $\int_a^b \upsilon(\tau)\left(\delta f(\tau) - \frac{d}{d\tau}f(\tau)\right)d\tau$ oblicza się, całkując przez części i wówczas powyższy wzór przyjmuje postać:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = e^{\delta t}\sum_{j=0}^{f}\left(\sum_{k\neq j} e^{-\delta T_{j+1}}\mathrm{R}_{jk}(T_{j+1}) + e^{-\delta T_{j+1}}V_j\left(T_{j+1}\right) - e^{-\delta T_j}V_j\left(T_j\right) - \int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\delta\tau} d\left(\Pi_j(\tau)-R_j(\tau)-D_j(\tau)\right)\right). \tag{7.9}$$

Ponieważ proces aktywizacji opcji po opuszczeniu stanu *j* może do niego powrócić, niech więc T_j^l oznacza odpowiednio moment początku *l*-tej „wizyty" polisy w stanie *j*. Wówczas wzór (7.9) przyjmuje postać:

$$\mathrm{ZL}(t,s) = e^{\delta t}\sum_{j=0}^{f}\sum_{l}\left(\sum_{k\neq j} e^{-\delta T_{j+1}^l}\mathrm{R}_{jk}(T_{j+1}^l) + \int_{T_j^l}^{T_{j+1}^l} e^{-\delta\tau} d\left(R_j(\tau)+D_j(\tau)-\Pi_j(\tau)\right) + e^{-\delta T_{j+1}^l}V_j\left(T_{j+1}^l\right) - e^{-\delta T_j^l}V_j\left(T_j^l\right)\right). \tag{7.10}$$

Powyższy wzór ma prostą interpretację. Pierwszy składnik wzoru jest to zaktualizowana wartość „ryzyka" oznaczonego R_{jk} związanego z przejściem procesu w chwili T_l^j ze stanu *j* do stanu *k*. Drugi składnik stanowią płatności dokonywane podczas pobytu polisy w stanie *j*. Ostatni składnik sumy to zaktualizowana wartość rezerw, jakimi powinna dysponować firma ubezpieczeniowa na koniec okresu. Na podstawie otrzymanych wzorów można wyznaczyć charakterystyki funkcyjne straty ubezpieczyciela.

7.2. Podstawowe parametry straty ubezpieczyciela

Analizując szkodowość, ubezpieczyciel powinien wziąć pod uwagę minimalną i maksymalną wielkość straty oraz jej zróżnicowanie. Odchylenie standardowe stanowi bowiem podstawową miarę ryzyka. Jednym z narzędzi statystyki służącym do estymacji wartości straty jest typowy przedział zmienności (tzw. przedział jednosigmowy). Od rozpiętości i wartości końców obszaru zmienności zależy precyzja i wielkość przewidywanych zysków lub strat związanych z zawarciem umowy ubezpieczenia. Im rozpiętość przedziału jednosigmowego jest mniejsza, tym bardziej precyzyjnie można określić przewidywane zyski lub straty. Zgodnie ze wzorem (7.10) strata ubezpieczyciela równa jest sumie strat związanych z określonym stanem, co oznacza, że strata ubezpieczyciela poniesiona w okresie $(t, s]$ trwania ubezpieczenia równa jest sumie strat związanych z określoną aktywną opcją ubezpieczenia (stanem procesu). Wówczas strata *ZL*(*t, s*) dana jest wzorem:

$$\mathrm{ZL}(t,s)=\sum_{j\in S}\mathrm{ZL}_j(t,s)=\sum_{j\in S}\sum_{l=0}^{f}\mathrm{ZL}_j\left(T_j^l,T_{j+1}^l\right).$$

Twierdzenie Hattendorffa (Norberg 1992, 1994, Ramlau-Hansen 1988, Wolthuis 1987) mówi o tym, że straty wynikające z zawartej polisy ubezpieczenia w różnych okresach trwania ubezpieczenia mają średnią zero i są nieskorelowane, ale nie są niezależne. Z powyższego wzoru wynika, że strata ubezpieczyciela związana z różnymi stanami procesu dotyczy różnych okresów trwania ubezpieczenia, a więc zgodnie z twierdzeniem Hattendorffa są one nieskorelowane o średniej równej zero. Bezpośrednią tego konsekwencją jest to, że wariancja całkowitej straty firmy ubezpieczeniowej jest równa sumie wariancji strat poniesionych w różnych okresach.

$$\mathrm{Var}\big(\mathrm{ZL}(t,s)\big)=\sum_{j\in S}\mathrm{ZL}_j(t,s)=\sum_{j\in S}\sum_{l=0}^{f}Var\left(\mathrm{ZL}_j\left(T_j^l,T_{j+1}^l\right)\right).$$

Wykorzystując postać straty daną wzorem (7.10), wariancję oblicza się w następujący sposób:

$$Var\left(ZL^j\ \left(S_l^j, T_l^j\right)\right) = Var\left(\frac{\upsilon(T_l^j)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(T_l^j) - \int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$= E\left(\frac{\upsilon(T_l^j)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(T_l^j) - \int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)^2$$

$$= E\left(\frac{\upsilon(T_l^j)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(T_l^j)\right)^2 - 2E\left(\frac{\upsilon\left(T_l^j\right)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}\left(T_l^j\right)\cdot\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$+ E\left(\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)^2.$$

Ostatni składnik sumy można przekształcić do następującej postaci:

$$E\left(\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)^2 =$$

$$\int_0^\infty\left(\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right) P_j\left(t, T_l^j\right)\mu_{jk}\left(T_l^j\right)dt$$

$$= -\int_0^\infty\left(\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right) dP_j\left(t, T_l^j\right)$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = \left(\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)^2 & v' = dP_j\left(t, T_l^j\right) \\ u' = 2\cdot\frac{\upsilon\left(T_l^j\right)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}\left(T_l^j\right)\mu_{jk}\left(T_l^j\right)\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau & v = P_j\left(t, T_l^j\right) \end{array}\right|$$

$$= \int_0^\infty 2\cdot\frac{\upsilon\left(T_l^j\right)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}\left(T_l^j\right)\mu_{jk}\left(T_l^j\right)P_j\left(t, T_l^j\right)\left(\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)dt$$

$$= 2\cdot E\left(\frac{\upsilon\left(T_l^j\right)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}\left(T_l^j\right)\cdot\left(\int_{S_l^j}^{T_l^j} \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)\right).$$

Zatem uwzględniając powyższe przekształcenia, otrzymuje się:

$$Var\left(ZL^j\ \left(S_l^j, T_l^j\right)\right) =$$

$$E\left(\frac{v(T_l^j)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(T_l^j)\right)^2$$

$$-\,2E\left(\frac{v\left(T_l^j\right)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}\left(T_l^j\right)\cdot\int_{S_l^j}^{T_l^j}\frac{v(\tau)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$+\,2E\left(\frac{v\left(T_l^j\right)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}\left(T_l^j\right)\cdot\int_{S_l^j}^{T_l^j}\frac{v(\tau)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$=\ E\left(\frac{v(T_l^j)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(T_l^j)\right)^2.$$

W związku z powyższym wariancję straty można wyrazić następująco:

$$Var\big(ZL(s,t)\big) = \sum_j\sum_{l=0}^{f} E\left(\frac{v\left(T_l^j\right)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}\left(T_l^j\right)\right)^2$$

$$= \sum_j\sum_{l=0}^{f} E\left(\int_{S_l^j}^{T_l^j}\frac{v(\tau)}{v(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)d\tau\right)^2 = \sum_j E_{\{X(s)=i\}}\left(\int_s^t \frac{v(\tau)}{v(\tau)} I_j(\tau)\sum_{k\neq j} R_{jk}(\tau)d\tau\right)^2$$

$$= \sum_j \int_s^t \frac{v^2(\tau)}{v^2(s)}\sum_{k\neq j} R_{jk}^2(\tau)P_{ij}(s,\tau)\mu_{jk}(\tau)\,d\tau.$$

Taki sam wynik znaleźć można w przytoczonych pracach Norberga, w których do wyprowadzenia tego wzoru wykorzystano teorię martyngałów.

7.3. Rozkład straty ubezpieczyciela

Znajomość rozkładu straty/zysku ubezpieczyciela jest istotna dla jego działalności ubezpieczeniowej i umożliwia uniknięcie ewentualnego bankructwa. W rozdziale tym określono dokładny rozkład procesu straty ubezpieczyciela z wykorzystaniem jej dystrybuanty. Dystrybuantę straty osiągniętej przez ubezpieczyciela do chwili *t* trwania ubezpieczenia określa się następująco:

$$F_{L(\tau),t}(u) = \mathbb{P}\left(\int_0^t \upsilon(\tau)dW(\tau) + \upsilon(t)V_{X(t)}(t) \le u\right). \tag{7.11}$$

Przy określaniu rozkładu przyszłej straty osiągniętej przez ubezpieczyciela po chwili t należy uwzględnić aktywną w tym momencie opcję polisy. Tak więc należy określić odpowiednio warunkowy rozkład przyszłej straty.

W związku z tym dystrybuanta przyszłej straty związanej z j-tą aktywną opcją polisy złożonej określona jest następująco:

$$F^j_{L(\tau),t}(u) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\upsilon(t)}\int_t^n \upsilon(\tau)dW(\tau) + \frac{\upsilon(n)}{\upsilon(t)}V_{X(n)}(n) - V_{X(t)}(t) \le u | X(t) = j\right). \tag{7.12}$$

Natomiast dystrybuantę skumulowanych przyszłych przepływów pieniężnych (rozdział 4) określa się wzorem:

$$F^j_{W(\tau),t}(u) = \mathbb{P}^W_j(t,u) = \mathbb{P}\left(\int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)}dW(\tau) \le u\, | X(t) = j\right). \tag{7.13}$$

Wówczas zależność między tymi dystrybuantami jest następująca:

$$\begin{aligned} &F^j_{L(\tau),t}(u) = \\ &\mathbb{P}\left(\frac{1}{\upsilon(t)}\int_t^n \upsilon(\tau)dW(\tau) + \frac{\upsilon(n)}{\upsilon(t)}V_{X(n)}(n) - V_{X(t)}(t) \le u | X(t) = j\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\upsilon(t)}\int_t^n \upsilon(\tau)dW(\tau) \le u - \frac{\upsilon(n)}{\upsilon(t)}V_{X(n)}(n) + V_{X(t)}(t) | X(t) = j\right) \\ &= F^j_{W(\tau),t}\left(u - \frac{\upsilon(n)}{\upsilon(t)}V_{X(n)}(n) + V_{X(t)}(t)\right). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Aby wyznaczyć rozkład straty ubezpieczyciela, należy wyznaczyć rozkład łącznych przepływów pieniężnych. Problem rozkładu przepływów pieniężnych podejmowany był w literaturze (Dickson 2006, Christiansen 2007, 2012, Bacinello 2009). Rozkład ten wyznaczono analogicznie jak rozkład skumulowanych świadczeń przedstawiony w rozdziale 4.3. Uwzględniając strumienie płatności charakterystyczne dla ubezpieczenia złożonego, wzór (7.13) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^W_j(t,u) = \\ &\mathbb{P}\left(\left(\sum_j \int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} I_j(\tau)dW_j(\tau) + \sum_j \sum_{k\neq j} \int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} c_{jk}(\tau)dN_{jk}(\tau)\right) \le u | X(t) = j\right), \end{aligned}$$

gdzie $\{W_j(t)\}$ jest procesem uwzględniającym wszystkie płatności związane ze stanem j.

Wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo całkowite otrzymuje się:

$$\mathbb{P}_j^W(t,u) =$$

$$\underbrace{\sum_{k\neq j}\int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{jj}\cdot\mu_{jk}(s)ds\cdot}_{\substack{\textit{prawdopodobieństwo przejścia ze}\\ \textit{stanu j do k w chwili s}}}\quad \mathbb{P}\left(\int_t^s \frac{v(\tau)}{v(t)}dW_j(\tau)+\frac{v(s)}{v(t)}c_{jk}(s)\right.$$

$$\left.+\int_s^n \frac{v(\tau)}{v(t)}dW(\tau)\leq u\,|X(s)=k\right)$$

$$+\quad \underbrace{{}_{n-t}p_{x+t}^{jj}\cdot}_{\substack{\textit{prawdopodobieństwo pozostania}\\ \textit{w stanie j do końca ubezpieczenia}}}\quad \mathbf{1}\left[\int_t^n \frac{v(\tau)}{v(t)}dW_j(\tau)\leq u\right].$$

W pierwszym składniku sumy wyrażenie ${}_{s-t}p_{x+t}^{jj}\cdot\mu_{jk}(s)ds$ określa prawdopodobieństwo pozostania procesu $\{X(t),t\geq 0\}$ w stanie *j* do chwili *s* i przejście procesu do stanu *k* w czasie $[s,s+ds)$. W tym przypadku przyszłe przepływy pieniężne do chwili s związane są ze stanem *j,* w chwili s wypłacane jest świadczenie jednorazowe w wysokości $c_{jk}(s)$ i zdarzenie

$$\int_t^n \frac{v(\tau)}{v(t)}dW(\tau)\leq u$$

przyjmuje następującą postać:

$$\int_t^s \frac{v(\tau)}{v(t)}dW_j(\tau)+\frac{v(s)}{v(t)}c_{jk}(s)+\int_s^n \frac{v(\tau)}{v(t)}dW(\tau)\leq u.$$

Analogicznie wyznacza się drugi składnik sumy. Wówczas wzór określający dystrybuantę łącznych przepływów pieniężnych przyjmuje postać:

$$\mathbb{P}_j^W(t,u) =$$

$$\sum_{k\neq j}\int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{jj}\cdot\mu_{jk}(s)\cdot\mathbb{P}_k^{W(\tau)}\left(s,\frac{v(t)}{v(s)}u-\int_t^s\frac{v(\tau)}{v(s)}dW_j(\tau)-c_{jk}(s)\right)ds$$

$$+\,{}_{n-t}p_{x+t}^{jj}\cdot\mathbf{1}\left[\int_t^n \frac{v(\tau)}{v(t)}dW_j(\tau)\leq u\right].$$

Na podstawie powyższego wzoru wyznacza się rozkład łącznych przepływów pieniężnych, a korzystając z zależności (7.13), wyznacza się rozkład straty ubezpieczyciela w indywidualnym ubezpieczeniu o rozszerzonym ryzyku. Aby wyznaczyć ten rozkład jako funkcję również czasu, należy opisać go za pomocą równania różniczkowego. Analogicznie jak w przypadku rozkładu skumulowanych świadczeń (por. Rozdział 4.3) funkcje rozkładu łącznych przepływów pieniężnych $\widetilde{\mathbb{P}}_j^W$ określone następująco:

$$\widetilde{\mathbb{P}}_j^W(t,u) = \widetilde{\mathbb{P}}_j^W\left(t, \frac{1}{v(t)}u - \int_0^t \frac{v(\tau)}{v(t)} dW_j(\tau)\right)$$

spełniają poniższe równanie różniczkowe (Norberg 2005, Ramlau-Hansen 2000):

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{P}}_j^W(t,u) &= \mu_j(t) \cdot \widetilde{\mathbb{P}}_j^W(t,u)dt \\ &-\sum_{k\neq j} \mu_{jk}(t)dt \cdot \widetilde{\mathbb{P}}_k^W\left(t, u + \int_0^t v(\tau)dW_k(\tau) - \int_0^t v(\tau)dW_j(\tau) - v(t)c_{jk}(t)\right)\end{aligned} \tag{7.15}$$

przy warunku początkowym:

$$\widetilde{\mathbb{P}}_j^W(n,u) = \mathbf{1}\left[\int_0^n v(\tau)dW_j(\tau) \le u\right].$$

Wyrażony w ten sposób rozkład łącznych przepływów pieniężnych jest podstawą do wyznaczenia rozkładu straty ubezpieczyciela.

7.4. Proces straty dla przykładowych polis z opcjami

W przypadku tradycyjnych ubezpieczeń proces całkowitej straty ubezpieczyciela zgodnie jest zmienną losową postaci:

$$ZL(n) = \sum_l \left(v(T_l^H)R_{HD}(T_l^H) + \int_{S_l^H}^{T_l^H} v(\tau)dW_H(\tau) + v(T_l^H)V_H(T_l^H) - v(S_l^H)V_H(S_l^H)\right),$$

gdzie S_l^j i T_l^j oznacza odpowiednio moment początku i końca *l*-tej „wizyty” procesu $\{X(t)\}$ w stanie *j*.

Uwzględniając strumienie płatności związane z poszczególnymi ubezpieczeniami UŻ, UD czy UŻD, na podstawie powyższego wzoru wyznacza się postać tej zmiennej losowej dla danego ubezpieczenia. W rozpatrywanym przykładzie zbadano stratę dla terminowego ubezpieczenia na życie. Ponieważ stan *D* jest stanem pochłaniającym procesu $\{X(t)\}$, stąd zmienna losowa określająca stratę ubezpieczyciela przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}&dZL(n) = \\ &v(T_1^H)R_{HD}(T_1^H) + \int_{S_1^H}^{T_1^H} v(\tau)dW_H(\tau) + v(T_1^H)V_H(T_1^H) - v(S_1^H)V_H(S_1^H) = \\ &v(T_x)(V_D(T_x) - V_H(T_x) + c_{HD}(T_x)) + \int_0^{T_x\wedge n} v(\tau)dW_H(\tau) + v(T_x)V_H(T_x) \\ &- v(0)V_H(0) = cv(T_x)\mathbf{1}[T_x \le n] - \pi \int_0^{T_x\wedge n} v(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Uwzględniając ciągłą kapitalizację odsetek i dokonując przekształceń algebraicznych, zmienna ta w ubezpieczeniu UŻ przyjmuje postać:

$$ZL(n) = ce^{-\delta T_x}\mathbf{1}[T_x \leq n] - \pi\int_0^{min(T_x,n)} e^{-\delta\tau}d\tau =$$

$$= ce^{-\delta T_x}\mathbf{1}[T_x \leq n] - \pi \cdot \frac{1-e^{-\delta \cdot min(T_x,n)}}{\delta}.$$

Natomiast uwzględniając strumienie płatności charakterystyczne dla ubezpieczenia UD, otrzymuje się zmienną losową w postaci:

$$ZL(n) = de^{-\delta n}\mathbf{1}[T_x \leq n] - \pi \int\limits_0^{min(T_x,n)} e^{-\delta\tau}d\tau.$$

Powyższe wzory można wykorzystać do wyznaczenia podstawowych charakterystyk rozkładu zmiennej losowej, odpowiednio w ubezpieczeniu UŻ oraz UD, ponieważ strata ubezpieczyciela jest zmienną losową wykorzystywaną do wyceny przepływów pieniężnych, a tym samym dla wyceny danego ubezpieczenia istotna jest precyzja tego oszacowania. Jako miary zróżnicowania przyjęto rozstęp, wariancję i odchylenie standardowe.

W przypadku ubezpieczenia UŻ minimalną stratę osiągnie firma ubezpieczeniowa wówczas, gdy ubezpieczony przez cały okres będzie opłacał składki i przeżyje *n* lat. Natomiast maksymalna wartość zostanie osiągnięta, gdy ubezpieczony umrze zaraz po zawarciu umowy ubezpieczenia. Wartości te wyznaczone na podstawie powyższego wzoru wynoszą odpowiednio:

$$ZL_{min}(n) = -\pi\frac{1-e^{-\delta \cdot n}}{\delta},$$

$$ZL_{max}(n) = c\,.$$

Odchylenie standardowe całkowitej straty wyznacza się, korzystając ze wzoru na wariancję, które w przypadku tego ubezpieczenia jest postaci:

$$\sigma_{ZL(n)} = \sqrt{\int_0^n v^2(\tau)R_{HD}^2(\tau)\ {}_{\tau}p_x^{HH}\mu_{HD}(\tau)d\tau} = \sqrt{\int_0^n e^{-2\delta\tau}(c-V_H(\tau))^2\ {}_{\tau}p_x^{HH}\mu_{HD}(\tau)d\tau}\,.$$

Analogicznie wyznacza się zakres zmienności i odchylenie standardowe w przypadku ubezpieczenia UD. Należy zauważyć, że zakres zmienności tylko pozornie jest funkcją jednego parametru *n*, tj. okresu ubezpieczenia, zależy on również od wysokości składki ubezpieczeniowej, której wysokość uzależniona jest od wieku ubezpieczonego. Na precyzję oszacowania, której miernikiem jest odchylenie standardowe, w sposób jawny wpływa zarówno okres ubezpieczenia (*n*), jak i wiek osoby ubezpieczanej (*x*). Przedstawione wzory są podstawą dalszych obliczeń numerycznych, których wyniki zamieszczono w poniższych tabelach. W tabeli 7.1 przedstawiono zakres zmienności, wariancję i odchylenie standardowe procesu całkowitej nadwyżki finansowej w zależności od wieku wstępu w 20-letnim ubezpieczeniu na życie z sumą ubezpieczenia równą 1 *j.p.*

Tabela 7.1. Rozstęp i odchylenie standardowe straty ubezpieczyciela dla UŻ w zależności od *x*

x	$ZL_{min}(n)$	$ZL_{max}(n)$	$Var(ZL(n))$	$\sigma_{ZL(n)}$
20	-0,0216448	1	0,0119596	0,10936
30	-0,0456473	1	0,0219499	0,148155
40	-0,139512	1	0,0421105	0,205208
50	-0,488013	1	0,0644889	0,253947

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 7.2 zamieszczono wartości tych samych charakterystyk w zależności od okresu ubezpieczenia UŻ zawartego z 30-latkiem.

Tabela 7.2. Rozstęp i odchylenie standardowe straty ubezpieczyciela dla UŻ w zależności od n

x	$ZL_{min}(n)$	$ZL_{max}(n)$	$Var(ZL(n))$	$\sigma_{ZL(n)}$
20	-0,0456473	1	0,0219499	0,148155
30	-0,166817	1	0,0269944	0,1643
40	-0,575809	1	0,0254427	0,159508
50	-0,922462	1	0,0241977	0,155556

Źródło: opracowanie własne.

W tabelach przedstawiono minimalną i maksymalną wartość straty oraz jej odchylenie standardowe. Należy zauważyć, że najbardziej niekorzystny (dla firmy ubezpieczeniowej) możliwy scenariusz jest wówczas, gdy ubezpieczony traci zdrowie bezpośrednio po zawarciu umowy ubezpieczenia i pozostaje w nim przez cały okres ubezpieczenia. W tym przypadku zaktualizowana wartość straty firmy jest równa 1 i tylko pozornie nie zależy od wieku osoby ubezpieczonej. Z tabeli można odczytać również wartość odchylenia standardowego całkowitej straty, którego wielkość wskazuje na to, że wartość maksymalna nie mieści się nawet w trzysigmowym przedziale zmienności. Świadczy to o tym, że prawdopodobieństwo osiągnięcia przez firmę strat tego rzędu jest bliskie zeru i w związku z tym w wycenach strumieni finansowych ubezpieczyciel za maksymalną możliwą wartość straty może przyjmować wartość wynikającą z uzyskanego przedziału.

Aby określić rozkład całkowitej straty, należy wyznaczyć rozkład łącznych przepływów pieniężnych. Rozkład łącznych przepływów pieniężnych wyznacza się ze wzoru (7.15), który dla ubezpieczenia tradycyjnego dany jest wzorem:

$$\mathbb{P}_H^W(0,u) =$$
$$\int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\cdot\mathbb{P}_D^{W(\tau)}\left(s,\frac{1}{v(s)}u-\int_0^s\frac{v(\tau)}{v(s)}dW_H(\tau)-c_{HD}(s)\right)ds$$
$$+\ {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[\int_0^n v(\tau)dW_H(\tau)\le u\right].$$

Po uwzględnieniu płatności wynikających z ubezpieczenia na życie UŻ powyższy wzór przyjmuje postać:

$$\mathbb{P}_H^W(0,u) =$$
$$\int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\,\mathbb{P}_D^W\left(s,\frac{1}{v(s)}u+\pi\int_0^s\frac{v(\tau)}{v(s)}d\tau-c\right)ds+$$
$$+\,{}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[-\pi\int_0^n v(\tau)d\tau\le u\right]=$$
$$\int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\,\mathbb{P}_D^W\left(s,u\cdot e^{\delta s}+\pi\cdot e^{\delta s}\frac{1-e^{-\delta s}}{\delta}-c\right)ds+$$
$$+\,{}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[-\pi\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}\le u\right]=$$
$$\int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\,\mathbb{P}_D^W\left(s,u\cdot e^{\delta s}+\pi\frac{e^{\delta s}-1}{\delta}-c\right)ds+$$
$$+\,{}_np_x^{HH}\cdot\mathbf{1}\left[-\pi\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}\le u\right].$$

Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_D^W\left(s,\frac{1}{v(s)}u+\pi\int_0^s\frac{v(\tau)}{v(s)}d\tau-c\right)$ występujące w powyższym wzorze zdefiniowane jest następująco:

$$\mathbb{P}_D^W\left(s,u\cdot e^{\delta s}+\pi\frac{e^{\delta s}-1}{\delta}-c\right)=$$
$$\mathbb{P}\left(\int_s^n e^{-\delta(\tau-s)}dW(\tau)\le ue^{\delta s}+\pi\frac{e^{\delta s}-1}{\delta}-c\,|\,X(s)=D\right).$$

Przy uwzględnieniu tej definicji i po dokonaniu dalszych przekształceń wzoru, otrzymuje się następującą postać rozkładu łącznych przepływów pieniężnych:

$$\mathbb{P}_H^W(0,u) =$$

$$\int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\,\mathbb{P}\left(\int_s^n e^{-\delta(\tau-s)}dW(\tau) \leq ue^{\delta s} + \pi\frac{e^{\delta s}-1}{\delta} - c|X(s)=D\right)$$

$$+ {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[-\pi\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \leq u\right] =$$

$$= \mathbb{P}\left(0 \leq ue^{\delta T_x} + \pi\frac{e^{\delta T_x}-1}{\delta} - c\right) + {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[-\pi\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \leq u\right] =$$

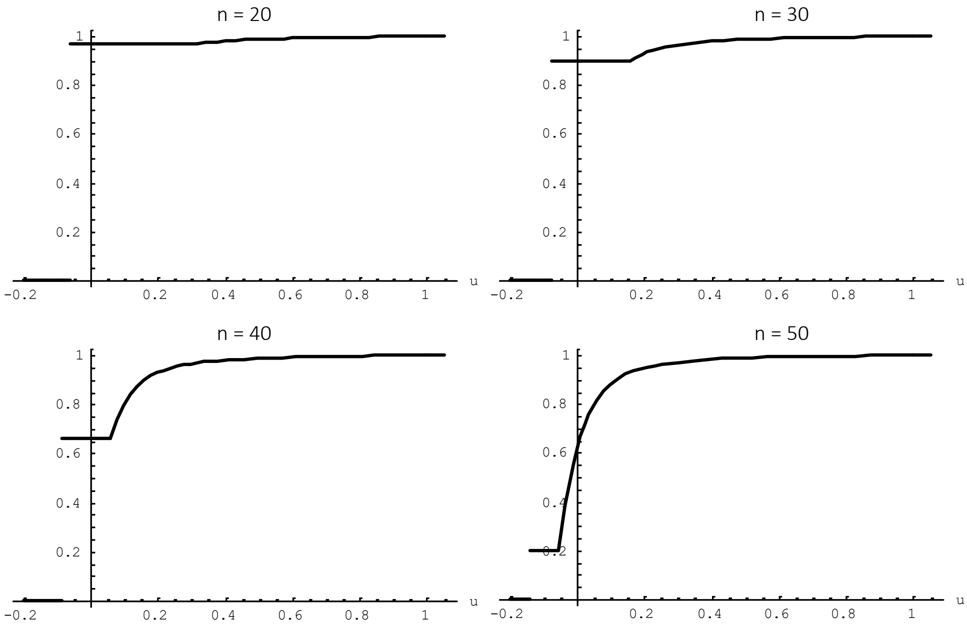
$$= \mathbb{P}\left(T_x \geq \underbrace{\frac{1}{\delta}ln\left(\frac{\pi+c\delta}{\pi+u\delta}\right)}_{t_1}\right) + {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[-\pi\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \leq u\right] =$$

$$= {}_{t_1}p_x^{HH} + {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[-\pi\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \leq u\right].$$

Dystrybuanta łącznych przepływów pieniężnych dana jest więc wzorem:

$$F_W^H(u) = \mathbb{P}_H^W(0,u) = \begin{cases} 0 & dla & u < -\pi\bar{a}_{\bar{n}} \\ {}_np_x^{HH} & dla & -\pi\bar{a}_{\bar{n}} \leq u < ce^{-\delta n} - \pi\bar{a}_{\bar{n}} \\ {}_{t_1}p_x^{HH} & dla & ce^{-\delta n} - \pi\bar{a}_{\bar{n}} \leq u < c \\ 1 & dla & u \geq c \end{cases}.$$

Następnie wyznacza się dystrybuantę całkowitej straty, przy czym zachodzi zależność: $F_L^H(u) = F_W^H(u - e^{-\delta n}V_H(n)) = F_W^H(u)$. Wykresy dystrybuant całkowitej straty ubezpieczyciela dla ubezpieczenia UŻ zawartego z osobą 30-letnią w zależności od okresu trwania ubezpieczenia (*n* = 20, 30, 40, 50) przedstawiono na rysunku 7.1.



Rysunek 7.1. Dystrybuanta całkowitej straty dla ubezpieczenia UŻ zawartego z 30-latkiem w zależności od okresu ubezpieczenia *n*

Źródło: opracowanie własne.

W analogiczny sposób wyznacza się rozkład przyszłej straty ubezpieczyciela dla dowolnego momentu *t* trwania ubezpieczenia.

W przypadku umowy ubezpieczenia złożonego UŻ/UD z wykupioną opcją dodatkową NW_AI + ADI, którego model opisano w rozdziale 2, natomiast strumienie płatności charakterystyczne dla tego typu ubezpieczenia przedstawiono w rozdziale 3, wartość straty wynikającej z zawartej umowy ubezpieczenia złożonego równa jest sumie strat związanych odpowiednio ze stanem *H* i stanem *NW_AI*. Pozostałe dwa stany to stany pochłaniające, więc straty w takim przypadku nie badamy. Postać tych zmiennych oznaczono odpowiednio $ZL^H(n)$ oraz $ZL^{AI}(n)$. Strata ubezpieczyciela związana ze stanem *H* jest następującą zmienną losową:

$$ZL^H(n) =$$

$$\sum_l \left(\upsilon(T_l^H) R_{HS}(T_l^H) + \upsilon(T_l^H) R_{HD}(T_l^H) + \int_{S_l^H}^{T_l^H} \upsilon(\tau) dW_H(\tau) \right.$$

$$\left. + \upsilon(T_l^H) V_H(T_l^H) - \upsilon(S_l^H) V_H(S_l^H) \right)$$

oraz strata związana ze stanem *NW_AI* dana jest wzorem:

$$ZL^{AI}(n) =$$

$$\sum_{l}\left(v(T_l^{AI})R_{AID}(T_l^{AI}) + \int_{S_l^{AI}}^{T_l^{AI}} v(\tau)dW_{AI}(\tau) + v(T_l^{AI})V_{AI}(T_l^{AI})\right.$$

$$\left.- v(S_l^{AI})V_{AI}(S_l^{AI})\right).$$

Przy uwzględnieniu przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi w tego typu ubezpieczeniu i po dokonaniu dalszych przekształceń, powyższe wzory przyjmują odpowiednio następującą postać:

$$ZL^{H}(n) =$$

$$v(T_1^{H})R_{HS}(T_1^{H}) + v(T_1^{H})R_{HD}(T_1^{H}) + \int_{0}^{T_1^{H}} v(\tau)dW_{H}(\tau) + v(T_1^{H})V_{H}(T_1^{H})$$

$$- v(0)V_H(0) =$$

$$= v(T_1^{H})\big(V_S(T_1^{H}) - V_H(T_1^{H}) + c_{HS}(T_1^{H}) + c_{HD}(T_1^{H})\big) + \int_{0}^{T_1^{H}} v(\tau)dW(\tau),$$

zaś strata związana ze stanem *NW_AI* przyjmuje postać:

$$ZL^{AI}(n) =$$

$$v(T_1^{AI})R_{AID}(T_1^{AI}) + \int_{S_1^{AI}}^{T_l^{AI}} v(\tau)dW_{AI}(\tau) + v(T_1^{AI})V_{AI}(T_1^{AI})$$

$$- v(S_1^{AI})V_{AI}(S_1^{AI}) =$$

$$= v(T_1^{AI})c_{AID}(T_1^{AI}) - v(S_1^{AI})V_{AI}(S_1^{AI}) + \int_{S_1^{AI}}^{T_l^{AI}} v(\tau)dW_{AI}(\tau).$$

Wielkość straty ubezpieczyciela zależy bezpośrednio od realizacji procesu $\{X(t)\}$, czyli procesu aktywizacji opcji ubezpieczenia. W rozpatrywanym przykładzie możliwe są następujące jego realizacje:

– ubezpieczony pozostanie zdrowy przez cały okres ubezpieczenia lub do momentu śmierci, jeśli nastąpi ona w dowolnym momencie trwania umowy,
– ubezpieczony straci zdrowie w dowolnym momencie trwania umowy ubezpieczenia.

Niech więc T_x^H będzie zmienną losową określającą przyszły czas życia w zdrowiu osoby w wieku x lat, zaś T_x oznacza przyszły czas życia osoby x-letniej. Wówczas wartości zmiennej losowej $ZL^H(n)$ zależą od procesu aktywizacji opcji ubezpieczenia. Jeśli ubezpieczony pozostanie zdrowy przez cały okres ubezpieczenia lub do momentu śmierci, strata związana ze stanem H jest następująca:

$$ZL^H(n) = e^{-\delta \cdot min(T_x,n)}(-V_H(min(T_x,n)) + c) - \pi \frac{1-e^{-\delta \cdot min(T_x,n)}}{\delta}.$$

Jeśli ubezpieczony straci zdrowie, wówczas zmienna losowa $ZL^H(n)$ jest postaci:

$$ZL^H(n) =$$

$$e^{-\delta\, min(T_x^H,n)}(V_S(min(T_x^H,n)) - V_H(min(T_x^H,n)) + 2c) - \pi \frac{1-e^{-\delta\, min(T_x^H,n)}}{\delta}.$$

Natomiast zmienna losowa $ZL^{AI}(n)$ przyjmuje wartość zero, gdy ubezpieczony pozostanie zdrowy przez cały okres ubezpieczenia lub umrze w okresie jego trwania, natomiast gdy utraci zdrowie, zmienna $ZL^{AI}(n)$ przyjmuje wartość:

$$ZL^{AI}(n) = ce^{-\delta\, min(T_x,n)} - V_{AI}(min(T_x^H,n))e^{-\delta\, min(T_x^H,n)}.$$

Tak jak w poprzednim przykładzie jako miary zróżnicowania przyjęto rozstęp, wariancję i odchylenie standardowe. Minimalną wartość straty $ZL^H(n)$ osiągnie firma ubezpieczeniowa wówczas, gdy ubezpieczony przez cały okres będzie opłacał składki i przeżyje n lat. Natomiast maksymalna wartość zostanie osiągnięta, gdy ubezpieczony ulegnie nieszczęśliwemu wypadkowi zaraz po zawarciu umowy ubezpieczenia. Stąd wartości te wynoszą odpowiednio:

$$ZL^H_{min}(n) = -\pi \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \text{ oraz } ZL^H_{max}(n) = V_{AI}(0) + 2c + \beta.$$

W przypadku zmiennej $ZL^{AI}(n)$ minimalna wartość zostanie osiągnięta, gdy ubezpieczony zachoruje po podpisaniu umowy i przeżyje do wieku $x + n$, natomiast wartość maksymalna, gdy zachoruje zaraz po podpisaniu umowy i umrze w wieku $x + n$, czyli:

$$ZL^{AI}_{min}(n) = -V_S(0) \text{ oraz } ZL^{AI}_{max}(n) = 2c + \beta - V_S(0).$$

Na podstawie tych wartości wyznacza się przedział $[ZL_{min}(n), ZL_{max}(n)]$ nazywany zakresem zmienności straty ubezpieczyciela. Analogicznie można wyznaczyć możliwe do osiągnięcia jej wartości: minimalną i maksymalną, które wynoszą:

$$ZL_{min}(n) = -\pi \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \text{ oraz } ZL_{max}(n) = 2c + \beta.$$

Natomiast wariancja całkowitej straty dla ubezpieczenia UŻ z opcją NW_AI + ADI przyjmuje postać:

$$Var\big(L(n)\big) = Var\big(L^{H}(n)\big) + Var\big(L^{AI}(n)\big) =$$

$$= \int_0^n \upsilon^2(\tau) \sum_{k\neq j} R_{Hk}^2(\tau)\, P_{HH}(0,\tau)\mu_{Hk}(\tau)d\tau$$

$$+ \int_0^n \upsilon^2(\tau) \sum_{k\neq j} R_{AIk}^2(\tau)\, P_{HAI}(0,\tau)\mu_{AIk}(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^n e^{-2\delta\tau}(V_{AI}(\tau) - V_H(\tau) + 2c + \beta)^2 \; {}_{\tau}p_x^{HH} \mu_{HAI}(\tau)d\tau$$

$$+ \int_0^n e^{-2\delta\tau}\big(c - V_H(\tau)\big)^2 \; {}_{\tau}p_x^{HH} \mu_{HD}(\tau)d\tau$$

$$+ \int_0^n e^{-2\delta\tau}(c - V_H(\tau))^2 \; {}_{\tau}p_x^{HAI} \mu_{AID}(\tau)d\tau.$$

Wówczas odchylenie standardowe całkowitej straty oblicza się ze wzoru:

$$\sigma_{ZL(n)} = \sqrt{Var(ZL^{H}(n)) + Var(ZL^{AI}(n))}.$$

Analogicznie jak w przypadku tradycyjnych ubezpieczeń również w przypadku wykupienia opcji dodatkowych zakres zmienności straty jest funkcją tylko dwóch parametrów: *n* – okresu ubezpieczenia oraz wieku osoby ubezpieczonej. Na precyzję oszacowania, której miernikiem jest odchylenie standardowe, wpływa natomiast zarówno długość okresu ubezpieczenia, jak i wiek osoby ubezpieczanej. Dalszych obliczeń wybranych charakterystyk nadwyżki finansowej dokonano, wykorzystując program Mathematica. W tabelach 7.3-7.4 przedstawiono wyniki obliczeń dla 20-letniego ubezpieczenia UŻ z opcją NW_AI + ADI. W tabeli 7.3 przedstawiono wartości przyjętych miar zróżnicowania (rozstępu, wariancji i odchylenia standardowego) dla całkowitej nadwyżki finansowej w zależności od wieku wstępu osoby ubezpieczanej. Natomiast w tabeli 7.4 przedstawiona jest minimalna i maksymalna wartość nadwyżek finansowych związanych z możliwymi stanami wynikającymi z zawartej umowy ubezpieczenia oraz ich odchylenia standardowe.

Tabela 7.3. Rozstęp i odchylenie standardowe straty dla UŻ z opcją NW_AI + ADI w zależności od *x*

x	$ZL_{min}(n)$	$ZL_{max}(n)$	$Var(ZL(n))$	$\sigma_{ZL(n)}$
20	-0,247578	3	0,056778361	0,23828210
30	-0,342717	3	0,077022849	0,277529906
40	-0,639061	3	0,136475390	0,369425757
50	-1,56936	3	0,253460510	0,503448617

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7.4. Rozstęp i odchylenie standardowe straty związanej z określonym stanem dla UŻ z NW_AI + ADI w zależności od *x*

x	$ZL^H_{min}(n)$	$ZL^H_{max}(n)$	$Var(ZL^H(n))$	$ZL^S_{min}(n)$	$ZL^S_{max}(n)$	$Var(ZL^S(n))$
20	-0,247578	2,07319	0,0566161	-0,0731912	0,926809	0,000162261
30	-0,342717	2,0895	0,0766651	-0,0894953	0,910505	0,000357749
40	-0,639061	2,12681	0,134894	-0,126812	0,873188	0,00158139
50	-1,56936	2,20692	0,248913	-0,206918	0,793082	0,00454757

Źródło: opracowanie własne.

Rozważmy sytuację, gdy umowa zawarta została z mężczyzną w wieku 30 lat. Najgorszy (dla firmy ubezpieczeniowej) możliwy scenariusz jest wówczas, gdy ubezpieczony traci zdrowie bezpośrednio po zawarciu umowy ubezpieczenia i pozostaje w tym stanie przez cały okres ubezpieczenia. W tym przypadku zaktualizowana wartość straty firmy równa jest 3 *j.p.* Z drugiej strony firma może osiągnąć zysk w wysokości 0,342717 *j.p.,* jeżeli ubezpieczony pozostanie zdrowy przez cały okres ubezpieczenia i będzie płacił składki zgodnie z zawartą umową. Z tabeli można odczytać, że odchylenie standardowe straty wynosi 0,277529906 *j.p.* Wynika stąd, że o ile wartość maksymalnego zysku znajduje się w trzysigmowym przedziale ufności, to wartość maksymalnej straty, podobnie jak w poprzednim przykładzie, nie mieści się w tym przedziale. Fakt ten ubezpieczyciel może wykorzystać między innymi w dokonywanych prognozach, kalkulacjach czy wycenach, przyjmując za maksymalną stratę wartość 0,83259 *j.p.* wynikającą ze zróżnicowania całkowitej straty. Z drugiej strony wyniki wskazują, że zmienność całkowitej straty zależy w znacznym stopniu od zmienności straty związanej ze stanem *H*, natomiast zmienność zmiennej $L^{AI}(n)$ tylko w nieznacznym stopniu przyczynia się do zmienności całkowitej. Powodem małego zróżnicowania $L^{AI}(n)$ w porównaniu ze zróżnicowaniem $L^H(n)$ jest duże prawdopodobieństwo, że polisa zawsze pozostanie w stanie *H* i wówczas $L^{AI}(n) = 0$. Ponadto przedstawione w tabelach zakresy staty wskazują na skośność jej rozkładów.

Aby określić rozkład całkowitej straty, należy wyznaczyć rozkład łącznych przepływów pieniężnych dla ubezpieczenia podstawowego z wykupioną opcją NW. Rozkład ten dla ubezpieczenia na życie z opcją NW wyrażony jest następującym wzorem:

$$\mathbb{P}_H^{W(\tau)}(0,u) =$$
$$= \int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HS}(s)\,\mathbb{P}_S^{W(\tau)}\left(s, \frac{1}{v(s)}u - \int_0^s \frac{v(\tau)}{v(s)}dW_H(\tau) - c_{HS}(s)\right)ds$$
$$+ \int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\,\mathbb{P}_D^{W(\tau)}\left(s, \frac{1}{v(s)}u - \int_0^s \frac{v(\tau)}{v(s)}dW_H(\tau) - c_{HD}(s)\right)ds$$
$$+ \ {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[\int_0^n v(\tau)dW_H(\tau) \le u\right] =$$
$$= \int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HS}(s)\,\mathbb{P}_S^{W(\tau)}\left(s, e^{\delta s}u + \pi\frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{-\delta s}} - 2c\right)ds$$
$$+ \int_0^n {}_sp_x^{HH}\mu_{HD}(s)\,\mathbb{P}_D^{W(\tau)}\left(s, e^{\delta s}u + \pi\frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{-\delta s}} - c\right)ds$$
$$+ \ {}_np_x^{HH}\mathbf{1}\left[\pi\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \le u\right].$$

Uwzględniając równości:

$$P_S^{W(\tau)}\left(s, e^{\delta s}u + \pi\frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{-\delta s}} - 2c\right) =$$
$$P\left(\int_s^n \frac{v(\tau)}{v(s)}dW(\tau) \le e^{\delta s}u + \pi\frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{-\delta s}} - 2c|X(s) = S\right),$$
$$P_D^{W(\tau)}\left(s, e^{\delta s}u + \pi\frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{-\delta s}} - c\right) =$$
$$P\left(\int_s^n \frac{v(\tau)}{v(s)}dW(\tau) \le e^{\delta s}u + \pi\frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{-\delta s}} - c|X(s) = D\right),$$

otrzymuje się rozkład łącznych przepływów pieniężnych określony następującym wzorem:

$$P_H^{W(\tau)}(0,u) =$$

$$\int_0^n {}_s p_x^{HH} \mu_{HS}(s)\, P\left(\int_s^n \frac{v(\tau)}{v(s)} dW(\tau) \le e^{\delta s} u + \pi \frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{\delta s}} - 2c \middle| X(s) = S \right) ds$$

$$+ \int_0^n {}_s p_x^{HH} \mu_{HD}(s)\, P\left(\int_s^n \frac{v(\tau)}{v(s)} dW(\tau) \le e^{\delta s} u + \pi \frac{1-e^{-\delta s}}{\delta e^{\delta s}} - c \middle| X(s) = D \right) ds$$

$$+ {}_n p_x^{HH} \mathbf{1}\left[\pi \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \le u \right] =$$

$$= P\left(T_x^H \ge \underbrace{\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\pi + 2c\delta}{\pi + u\delta} \right)}_{t_1} \right) + P\left(T_x \ge \underbrace{\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\pi + c\delta}{\pi + u\delta} \right)}_{t_2} \right)$$

$$+ {}_n p_x^{HH} \mathbf{1}\left[\pi \underbrace{\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}}_{\bar{a}_{\overline{n|}}} \le u \right] = {}_{t_1} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}\left[\pi \bar{a}_{\overline{n|}} \le u\right]$$

$$= {}_{t_1} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HS} + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}\left[\pi \bar{a}_{\overline{n|}} \le u\right].$$

Następnie wyznacza się rozkład całkowitej straty ubezpieczyciela w indywidualnym ubezpieczeniu UŻ z opcją NW. Zgodnie z tym wzorem dystrybuanta tej zmiennej spełnia zależność:

$$F_{L(\tau)}^H(u) = F_{W(\tau)}^H\big(u - v(n) V_{X(n)}(n) + V(0)\big) = F_{W(\tau)}^H(u).$$

Stąd postać analityczna dystrybuanty jest następująca:

$$F_L^H(u) = F_{\mathcal{B}}^H(u) =$$

$$P_H^{\mathcal{B}(\tau)}(0,u) = \begin{cases} 0 & dla \;\; u < -\pi \bar{a}_{\overline{n|}} \\ {}_n p_x^{HH} & dla \;\; -\pi \bar{a}_{\overline{n|}} \le u < c \cdot e^{-\delta n} - \pi \bar{a}_{\overline{n|}} \\ {}_{t_1} p_x^{HH} & dla \;\; c \cdot e^{-\delta n} - \pi \bar{a}_{\overline{n|}} \le u < c \\ {}_{t_2} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HS} & dla \;\; c \le u < 2c \cdot e^{-\delta n} - \pi \bar{a}_{\overline{n|}} \\ 1 & dla \;\; u \ge 2c \cdot e^{-\delta n} - \pi \bar{a}_{\overline{n|}} \end{cases}.$$

Dystrybuanta straty, podobnie jak w poprzednim przykładzie, jest funkcją wieku wstępu i okresu trwania ubezpieczenia. Na podstawie powyższego wzoru można badać jej kształt w zależności od tych parametrów. Powyższe rozważania dotyczyły całkowitej straty ubezpieczyciela wynikającej z ubezpieczenia podstawowego z opcją NW. W analogiczny sposób można badać rozkład straty ubezpieczyciela dla dowolnego momentu *t* trwania ubezpieczenia, biorąc pod uwagę jedynie przyszłe przepływy pieniężne.

7.5. Wypłata z portfela polis i jego ryzyko

Rozważmy portfel złożony z *m* polis ubezpieczenia zawartych z osobami w wieku $x_1, x_2, \ldots, x_m$ odpowiednio na okres ubezpieczenia $n_1, n_2, \ldots, n_m$. W przypadku ubezpieczeń na życie, które sprzedawane są indywidualnie, poszczególne procesy płatności dla portfela są sumą strumieni płatności z indywidualnych polis w portfelu. Dlatego też proces zagregowanej wypłaty dla portfela jako całości oznaczony $\{W^{PTF}(t)\}_{t\geq 0}$ wyznaczono jako sumę świadczeń związanych z indywidualnym ubezpieczeniem. Zaktualizowana wartość zagregowanej wypłaty wyraża się następującym wzorem:

$$PV_t^{PTF}(\mathcal{T}) = \sum_{l=1}^{m} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta(\tau-t)} d\mathcal{W}^l(\tau),$$

gdzie $W^l(t)$ – proces skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu.

Wzór ten określa ogólną wycenę wypłaty z portfela polis. Powinien być postrzegany jako dający ważną informację o ryzyku finansowym związanym z portfelem. Informacje te są niezwykle przydatne w długoterminowym planowaniu, kalkulacji składek i dla zachowania wypłacalności ubezpieczyciela. Przy uwzględnieniu rodzaju świadczeń powyższy wzór przyjmuje postać:

$$PV_t^{PTF}(\mathcal{T}) =$$

$$\sum_{l=1}^{m} \left[\int_0^t e^{-\delta\cdot(\tau-t)} \sum_j \left(I_{\{X^{(l)}(\tau)=j\}} \cdot \left(dC_j^{(l)}(\tau) + dD_j^{(l)}(\tau) \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{k\neq j} c_{jk}^{(l)}(\tau) dN_{jk}^{(l)}(\tau) \right) \right] =$$

$$= \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} \sum_j \sum_{l=1}^{m} I_{\{X^{(l)}(\tau)=j\}} \left(dC_j^{(l)}(\tau) + dD_j^{(l)}(\tau) \right)$$

$$+ \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} \sum_j \sum_{k\neq j} \sum_{l=1}^{m} c_{jk}^{(l)}(\tau) dN_{jk}^{(l)}(\tau).$$

W pracy zakłada się niezależność szkód wynikających z różnych kontraktów ubezpieczeniowych. Założenie to powoduje, że przedstawiony proces odpowiada tylko niektórym szczególnym grupom ubezpieczeń. Dobrze opisuje on grupę ubezpieczeń na życie, do których zaliczamy ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi. Zatem jego parametry wyznacza się ze wzorów na wartość oczekiwaną i wariancję sumy niezależnych zmiennych losowych:

$$E(PV_t^{PTF}(\mathcal{T})|X^1(t)=i_1,\dots,X^m(t)=i_m)=\sum_{l=1}^{m}E\big(ZW_t{}^l(\mathcal{T})|X^l(t)=i_l\big),$$

$$Var(PV_t^{PTF}(\mathcal{T})|X^1(t)=i_1,\dots,X^m(t)=i_m)=\sum_{l=1}^{m}Var\big(ZW_t{}^l(\mathcal{T})|X^l(t)=i_l\big).$$

W przypadku ubezpieczeń tego typu najważniejszymi czynnikami różnicującymi ubezpieczonych jest wiek i płeć. Wyróżnia się też czynniki różnicujące rodzaj ubezpieczenia, tj. okres ubezpieczenia oraz typ ubezpieczenia podstawowego (UZ – ubezpieczenie na życie, UD – ubezpieczenie na dożycie, UZD – ubezpieczenie mieszane). Zatem analizując zagregowaną wypłatę z portfela na podstawie indywidualnych polis składających się na portfel i wyznaczając parametry jej rozkładu, dokonano podziału portfela na klasy według następujących czynników różnicujących: wiek i płeć ubezpieczonego $\left(x_k,\frac{K}{M}\right)$ oraz okres i przedmiot ubezpieczenia $\left(n_k,\frac{UZ}{UD}\right)$. W związku z tym niejednorodny portfel polis dzieli się na jednorodne klasy $G_1, G_2, \dots, G_k$ o liczebności k-tej klasy odpowiednio M_k. Uwzględniając czynniki różnicujące, strukturę jednorodnej klasy oznaczono jako:

$$G_k=\left(x_k,n_k,{}^{UZ}/_{UD},M_k,p_k\right).$$

Wówczas wartość oczekiwaną zagregowanej wypłaty wyznaczono w następujący sposób:

$$E\big(PV_t^{PTF}(\mathcal{T})(\mathcal{T})\big)=$$

$$E\left(\sum_k PV_t{}^{G_k}(\mathcal{T})\right)=\sum_k m_k\,E\left(PV_t{}^{l_k}(\mathcal{T})\right)=m\sum_k p_k\cdot E\left(PV_t{}^{l_k}(\mathcal{T})\right),$$

gdzie $PV^{G_k}(t)$ – proces zagregowanej wypłaty z jednorodnej klasy,

$PV^{l_k}(t)$ – proces skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu z k-tej klasy,

p_k – prawdopodobieństwo zaliczenia ubezpieczonego do k-tej klasy.

Z powyższego wzoru wynika, że wartość oczekiwana zagregowanej wypłaty dla całego niejednorodnego portfela jest sumą wartości oczekiwanych z poszczególnych klas jednorodnych. W analogiczny sposób wyznacza się wariancję zagregowanej wypłaty jako sumę wariancji z wydzielonych klas.

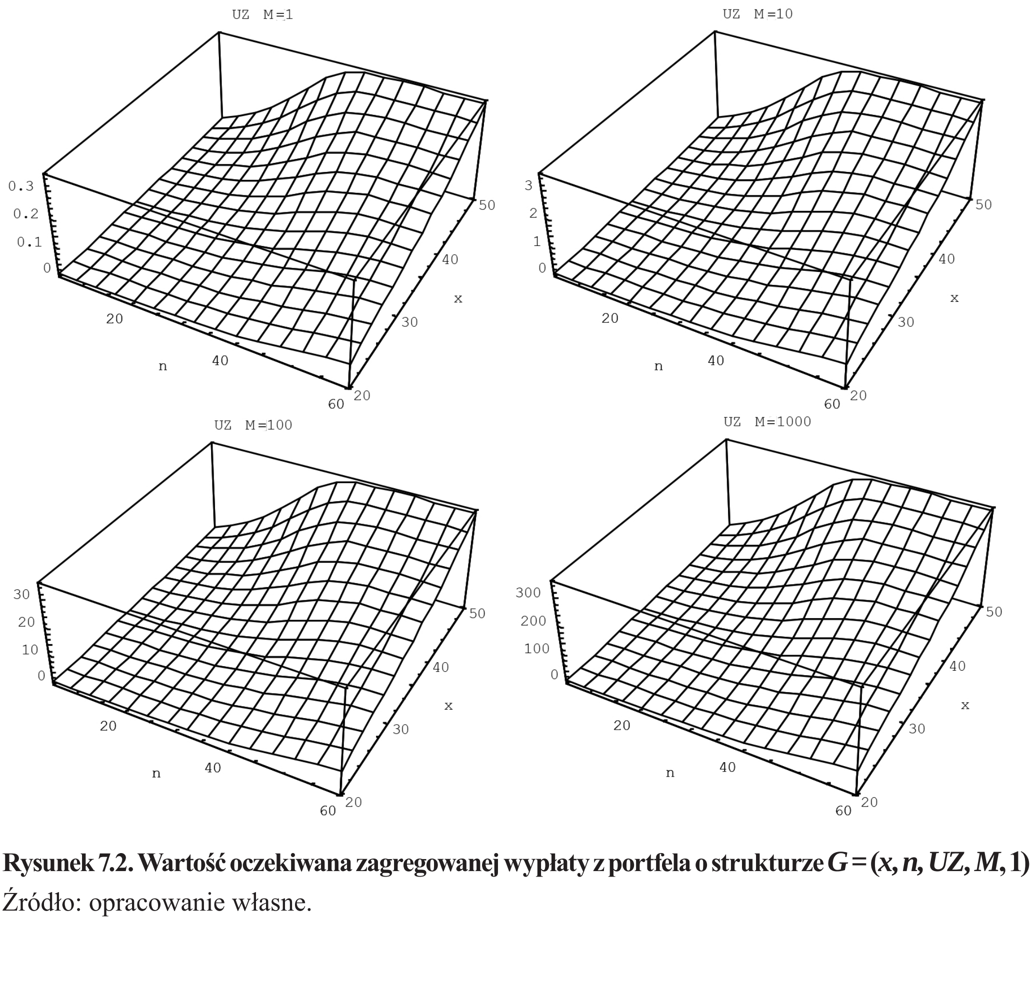
7.6. Zagregowana wypłata dla przykładowych portfeli ubezpieczeń

Najprostszym przykładem jest ubezpieczenie podstawowe bez żadnych opcji dodatkowych, obejmujące ubezpieczenie na życie (UŻ), czyste ubezpieczenie na dożycie

(UD) czy ubezpieczenie mieszane na życie i dożycie (UŻD). Przedmiotem takich ubezpieczeń jest życie ubezpieczonego. Zagregowana wypłata dla portfela w tego typu ubezpieczeniu jest równa:

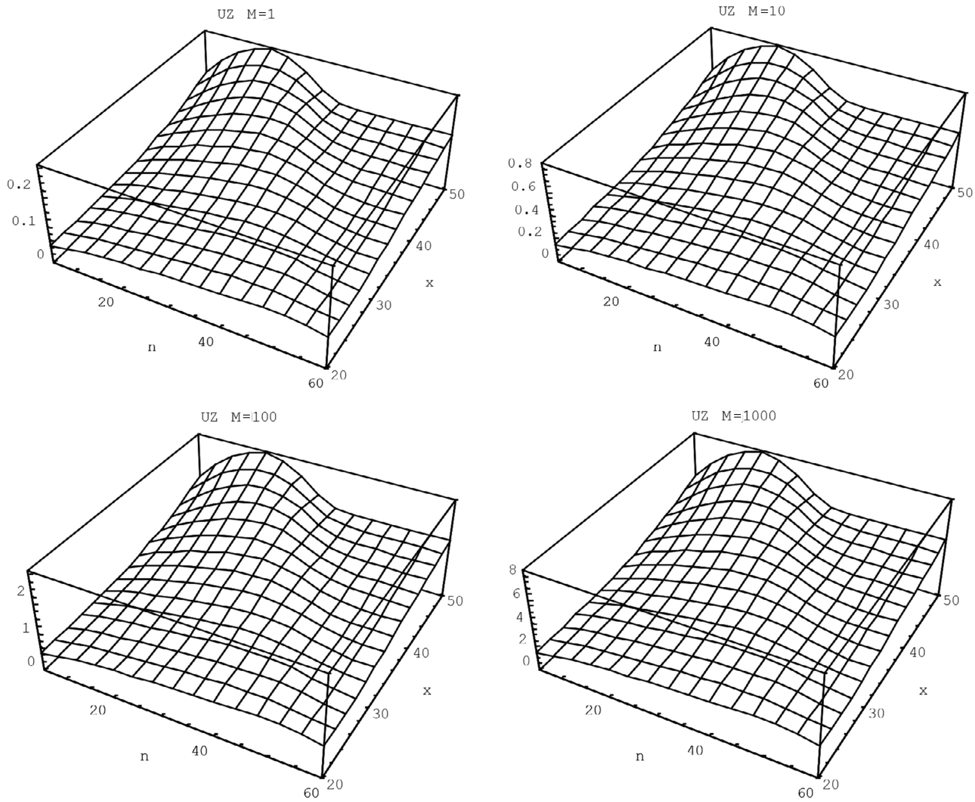
$$PV_t^{PTF}(\mathcal{T}) = \sum_{l=1}^{m}\left(de^{-\delta(n-t)}I_H^l(n) + c\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)}dN_{HD}^l(\tau)\right).$$

W pierwszej kolejności zbadano parametry całkowitej zagregowanej wypłaty (nazywanej również całkowitymi skumulowanymi świadczeniami), czyli obejmującej całkowite strumienie płatności z uwzględnieniem wieku osób ubezpieczanych i długości okresu ubezpieczenia. Analizą objęto klasę jednorodną mężczyzn wieku *x* lat, którzy zawarli *n*-letnie ubezpieczenie na życie, a uwzględniając również wymienione czynniki różnicujące jej strukturę, oznaczono ją $G = (x, n, UZ, M, 1)$. Wykresy wybranych parametrów (wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego) zagregowanej wypłaty dla jednorodnego portfela o określonej strukturze i liczebności równej odpowiednio $M = 1, 10, 100, 1000$ przedstawiono na poniższym rysunku.



Rysunek 7.2. Wartość oczekiwana zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze $G = (x, n, UZ, M, 1)$
Źródło: opracowanie własne.

Z powyższych rysunków wynika, że w przypadku portfeli jednorodnych liczba polis w portfelu wpływa jedynie na rząd wielkości wartości oczekiwanej. We wszystkich przypadkach wartość oczekiwana całkowitej zagregowanej wypłaty, jak można się było spodziewać, niezależnie od wieku wstępu, jest rosnącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia *n*. Natomiast jeżeli rozpatrujemy ją jako funkcję wieku osoby ubezpieczanej, to możemy zaobserwować, że dla wieloletnich kontraktów ubezpieczeniowych są to funkcje rosnące, natomiast dla małych wartości *n* jest to funkcja prawie stała.

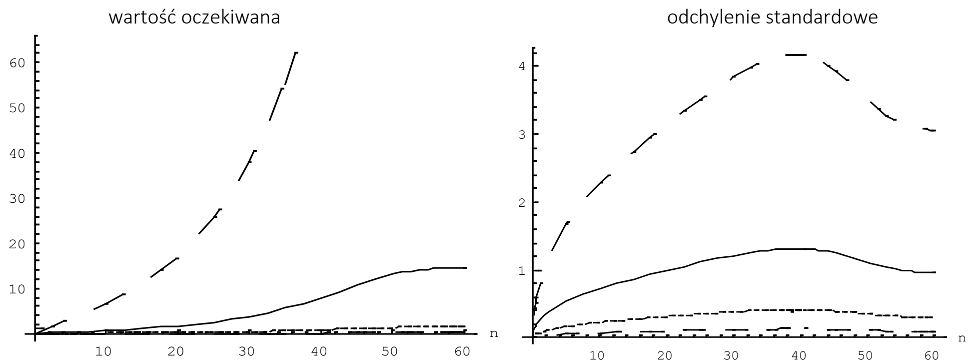


Rysunek 7.3. Odchylenie standardowe zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze $G = (x, n, UZ, M, 1)$

Źródło: opracowanie własne.

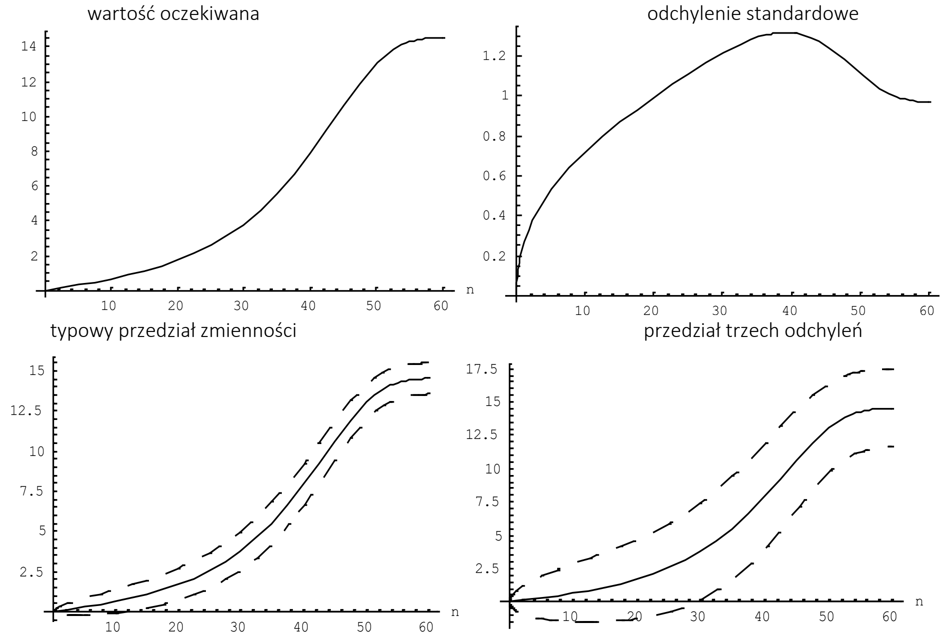
Odchylenie standardowe jest miarą dokładności oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń. Przedstawione wykresy wskazują, że również w przypadku odchylenia standardowego liczba polis wpływa jedynie na rząd wielkości i nie wpływa na przebiegi i własności przedstawionych funkcji. Wykresy odchylenia standardowego we wszystkich przypadkach wskazują, że dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej odchylenie standardowej rośnie od $n = 1$ do maksimum i następnie maleje aż do $n = 60$. Natomiast jako funkcje wieku osób ubezpieczonych są to funkcje rosnące.

Przedstawione własności funkcji można dokładniej przeanalizować, rozpatrując umowy zawarte z ubezpieczonym w określonym wieku. Przyjęto wiek ubezpieczonych mężczyzn 30 lat, co oznacza zbadanie parametrów rozkładu zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze odpowiednio $G = (30, n, UZ, M, 1)$.



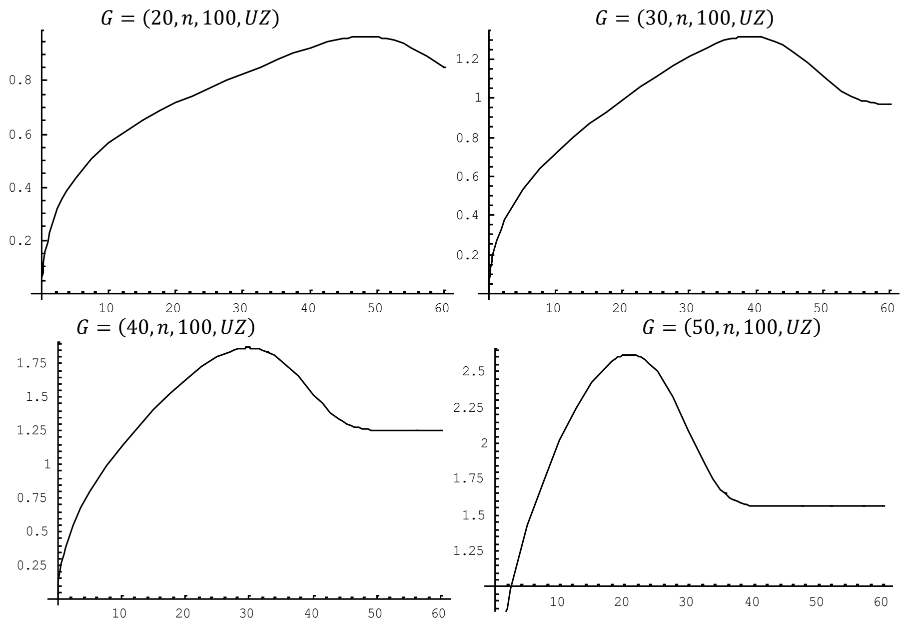
Rysunek 7.4. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe całkowitej zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, UZ, M, 1)$ i $M = 1, 10, 100, 1000$
Źródło: opracowanie własne.

Analizując wyniki uzyskane dla struktury portfela $G = (30, n, UZ, M, 1)$, potwierdza się, że liczba polis w portfelu wpływa jedynie na rząd wielkości, a przebieg i własności wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego jako funkcji n nie ulegają zmianie przy różnych wartościach M. Dlatego też, ze względu na występujące analogie, do dalszej analizy wybrano portfel o ustalonej liczebności, tzn. przyjęto $M = 100$ przy niezmienionych pozostałych czynnikach różnicujących, czyli zbadano kształtowanie się wybranych charakterystyk funkcyjnych dla portfela o strukturze $G = (30, n, UZ, 100, 1)$. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunku 7.5.



Rysunek 7.5. Parametry całkowitej zagregowanej wypłaty z portfela *G* = (30, *n*, *UZ*, 100, 1)
Źródło: opracowanie własne.

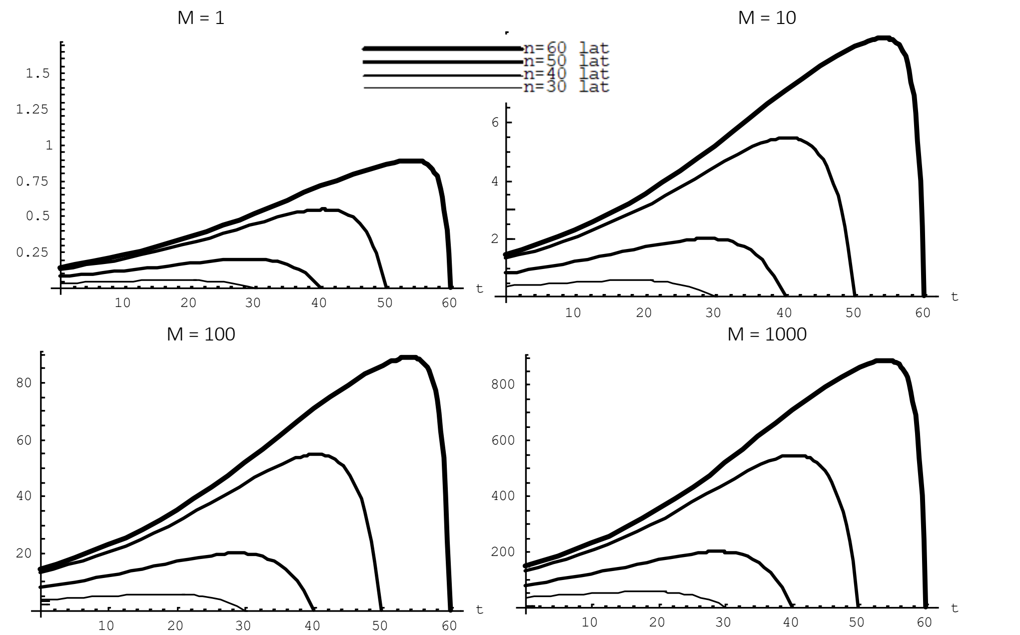
Wykresy analizowanych parametrów całkowitej zagregowanej wypłaty dla portfela $G = (30, n, UZ, 100, 1)$ wskazują, że wartość oczekiwana jest rosnącą funkcją okresu ubezpieczenia, natomiast w przypadku odchylenia standardowego otrzymano funkcję, która osiąga maksimum w punkcie $n_{max} = 39{,}1$, dla którego ${}_tp_x^{HH} = 0{,}7$. Oznacza to, że w tym przypadku najmniejsza precyzja szacunku oczekiwanej zagregowanej wypłaty z portfela charakteryzuje portfel ubezpieczeń zawieranych na okres ok. 35-45 lat. Aby potwierdzić te tendencje, wyznaczono odchylenie standardowe dla jednorodnych portfeli ubezpieczeń zawieranych z osobami w wieku 20, 30, 40 i 50 lat.



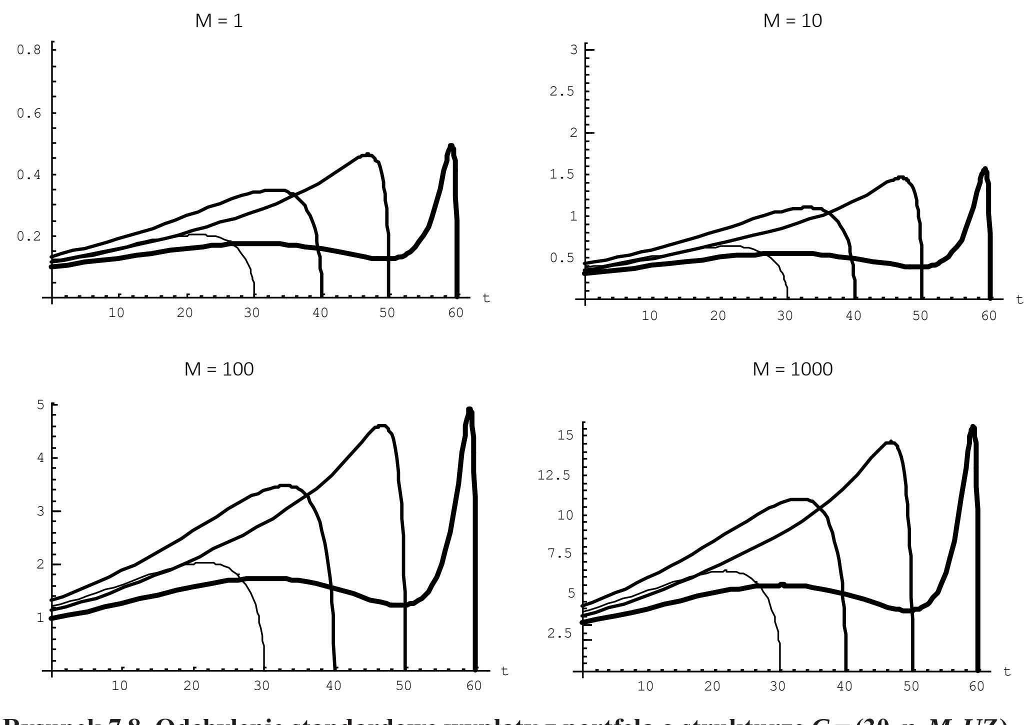
Rysunek 7.6. Odchylenie standardowe wypłaty z jednorodnego portfela *G* = (*x, n, UZ*, 100, 1) *x* = 20, 30, 40 i 50

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe wykresy przedstawiają, w jaki sposób czynniki różnicujące, jakimi są wiek osób ubezpieczanych i okres ubezpieczenia, wpływają na dokładność szacunku oczekiwanej zagregowanej wypłaty z portfela. We wszystkich przypadkach wartość odchylenia standardowego rośnie i maksimum osiąga w punkcie, dla którego spełniony jest warunek ${}_np_x = {}_np_x^{HH} = 0{,}7$. W związku z tym najmniejszą precyzją szacunku zagregowanej wypłaty charakteryzują się ubezpieczenia zawierane na okres n_{max}. Drugi aspekt przeprowadzonej analizy wiąże się z analizą własności procesu przyszłych skumulowanych świadczeń już w okresie trwania ubezpieczenia, z uwzględnianiem ewentualnych niedoszacowań w przyszłych płatnościach. Zbadano więc wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe przyszłej zagregowanej wypłaty dla portfela polis o strukturze $G = (30, n, M, UZ)$, tzn. na portfel składają się n-letnie polisy ubezpieczenia na życie zawarte z mężczyznami w wieku 30 lat; do obliczeń przyjęto okres ubezpieczenia równy odpowiednio 20, 30, 40 i 50 lat.

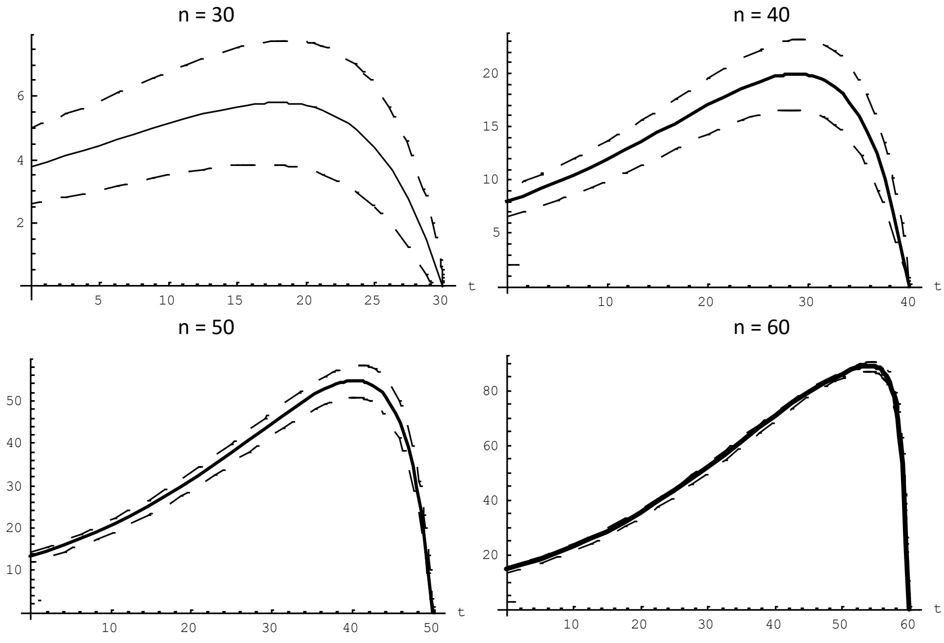


Rysunek 7.7. Wartość oczekiwana wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, M, UZ)$
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 7.8. Odchylenie standardowe wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, M, UZ)$
Źródło: opracowanie własne.

Podobnie jak w przypadku całkowitej zagregowanej wypłaty, również analizując przyszłe świadczenia wynikające z portfela jednorodnego, można stwierdzić, że wielkość portfela wpływa na rząd wielkości, natomiast przebieg wartości oczekiwanej jako funkcji czasu nie ulega zmianie. Interesujące jest zatem zbadanie, czy precyzja szacunków ulega zmianie w okresie trwania ubezpieczenia. Analizując wyniki dotyczące odchylenia standardowego, potwierdza się, że liczba polis w portfelu wpływa jedynie na rząd wielkości, a przebieg i własności odchylenia standardowego jako funkcji t nie ulegają zmianie przy różnych wartościach M. Ponadto z powyższych wykresów odchylenia standardowego wynika, że precyzja szacunku oczekiwanej zagregowanej wypłaty zależy od okresu ubezpieczenia. Dlatego też do dalszej analizy wybrano portfel o ustalonej liczebności (przyjęto $M = 100$), czyli zbadano kształtowanie się wybranych charakterystyk funkcyjnych dla portfela o strukturze $G = (30, n, 100, UZ)$ dla różnych okresów ubezpieczenia $n = 20, 30, 40, 50$. Aby dokonać porównania precyzji szacunku, na kolejnym wykresie przedstawiono wartość oczekiwaną przyszłej zagregowanej wypłaty wraz z odpowiadającym jej przedziałem zmienności.



Rysunek 7.9. Przedział zmienności wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, 100, UZ)$
Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie otrzymanych przedziałów zmienności przyszłej zagregowanej wypłaty z portfela ubezpieczeń zawieranych odpowiednio na 20, 30, 40 i 50 lat można zauważyć, że niezależnie od przyjętego okresu ubezpieczenia w okresie trwania ubezpieczenia precyzja szacunku zmienia się w okresie trwania ubezpieczenia i nie ma jednoznacznej tendencji. We wszystkich przypadkach wartość odchylenia standardowego rośnie i gwałtownie spada pod koniec okresu ubezpieczenia. A zatem w okresie trwania ubezpieczenia ubezpieczyciel może korygować ewentualne powstałe w czasie niedoszacowania zagregowanej wypłaty, jednak powinien uwzględniać rosnące wartości odchylenia standardowego.

Przedstawione analizy dotyczyły parametrów zagregowanej wypłaty portfela jednorodnego. Jeśli portfel ubezpieczeń jest niejednorodny, wówczas ubezpieczyciel, uwzględniając czynniki różnicujące, powinien podzielić go na jednorodne klasy i wyceniać zgodnie z tym, co przedstawiono.

Aby zilustrować, jak istotny jest podział na jednorodne klasy, wyceniono niejednorodny portfel jako całość i z uwzględnieniem jednorodnych klas. Wybrano portfel ubezpieczeń o strukturze $G = \left(x, n, UZ, 100, \frac{1}{4}\right)$ z czynnikiem różnicującym, jakim jest wiek osób ubezpieczonych. Zatem z całego portfela wydzielono ze względu na wiek ubezpieczonych cztery klasy:

Klasa 1: trzydziestolatków,

Klasa 2: czterdziestolatków,

Klasa 3: pięćdziesięciolatków,

Klasa 4: sześćdziesięciolatków,

którzy zawarli n-letnie ubezpieczenie na życie.

Klasom tym odpowiadają portfele ubezpieczeniowe, których struktura odpowiednio jest następująca:

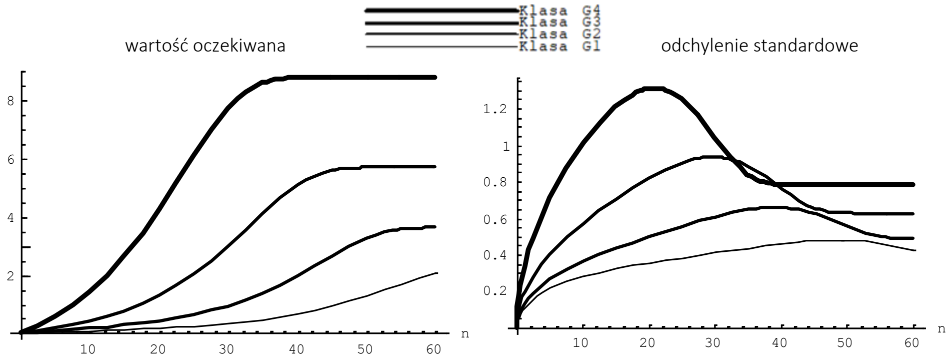
Klasa 5: $G_1 = \left(30, n, UZ, M_1, \frac{1}{4}\right)$,

Klasa 6: $G_2 = \left(40, n, UZ, M_2, \frac{1}{4}\right)$,

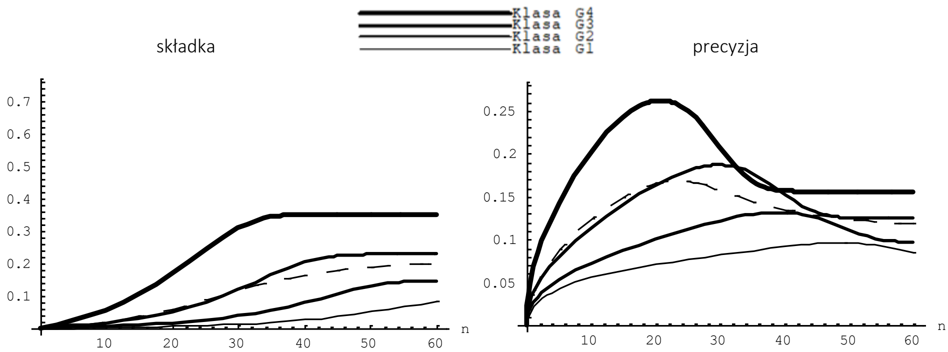
Klasa 7: $G_3 = \left(50, n, UZ, M_3, \frac{1}{4}\right)$,

Klasa 8: $G_4 = \left(60, n, UZ, M_4, \frac{1}{4}\right)$.

Dla wskazanych portfeli jednorodnych oraz portfela niejednorodnego jako całości wyznaczono wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zagregowanej wypłaty oraz wysokość składki netto, a wyniki przedstawiono na poniższych wykresach.



Rysunek 7.10. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe całkowitej zagregowanej wypłaty w wyznaczonych jednorodnych klasach o liczebnościach $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 25$
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 7.11. Składka ubezpieczenia w wyznaczonych jednorodnych klasach oraz dla portfela jako całości wraz z precyzją jej szacunku
Źródło: opracowanie własne.

Na powyższych wykresach przedstawiono wycenę portfela wraz z precyzją jej szacunku dla portfela jako całości (linia przerywana) oraz z uwzględnieniem niejednorodności. Porównując wyniki uzyskane dla niejednorodnego portfela, widzimy, że wyceniając niejednorodny portfel, ubezpieczyciel powinien uwzględniać jego strukturę. W przypadku wyceny takiego portfela jako całości, tzn. bez podziału na jednorodne klasy, składka za takie ubezpieczenie dla wszystkich byłaby „niesprawiedliwa". Dla osób ubezpieczonych należących do klas G_1i G_2 byłaby za wysoka, a dla ubezpieczonych z klas G_3i G_4 za niska. Innymi słowy jest ona za wysoka dla osób o niskim ryzyku, a za niska dla ubezpieczonych o wnoszących wysokie ryzyko do portfela. Jest to zjawisko tzw. niekorzystnej klasyfikacji, które prowadzi do deficytu finansowego towarzystwa, a w konsekwencji do jego bankructwa.

Literatura przedmiotu

1. AIA (2014). “Valuation of Share-Based Payments”, Australian Institute of Actuaries, https://www.actuaries.asn.au/Library [dostęp: 01.2020].
2. Albrecher, H., Bauer, D., Embrechts, P., Filipović, D., Koch-Medina, P., Korn, R., Loisel, S., Pelsser, A., Schiller, F., Schmeiser, H. i in. (2018). “Asset-Liability Management for Long-Term Insurance Business” *European Actuarial Journal*, Vol. 8, No. 1, 9–25.
3. Allignol, A., Beyersmann, J., Gerds, T., Latouche, A. (2014). “A Competing Risks Approach for Nonparametric Estimation of Transition Probabilities in a Non-Markov Illness-Death Model” *Lifetime Data Analysis*, Vol. 20, 1–19.
4. Andersen, P.K., Borgan, Ø., Gill, R.D., Keiding, N. (1991). “Statistical Models Based on Counting Processes”. New York: Springer.
5. Andersen, P.K., Keiding, N. (2002). “Multi-State Models for Event History Analysis” *Statistical Methods in Medical Research*, Vol. 11, No. 2, 91–115.
6. Andersen, P.K., Klein, J.P., Rosthøj, S. (2003). “Generalised Linear Models for Correlated Pseudo-Observations with Applications to Multi-State Models” *Biometrika*, Vol. 90, No. 1, 15–27.
7. Aro, H., Djehiche, B., Löfdahl, B. (2013). “Stochastic Modelling of Disability Insurance in a Multi-Period Framework” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2013, No. 1, 88-106.
8. Asmussen, S., Møller, J.R. (2003). “Risk Comparisons of Premium Rules: Optimality and a Life Insurance Study” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 32, 331–344.
9. Atkinson, D.B., Dallas, J.W. (2000). *Life Insurance Products and Finance*. Schaumburg, IL.: Society of Actuaries.
10. Bacinello, A.R. (2003). “Fair Valuation of a Guaranteed Life Insurance Participating Contract Embedding a Surrender Option” *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 70, No. 3, 461-487.
11. Bacinello, A., Biffis, E., Millossovich, P. (2009). “Pricing Life Insurance Contracts with Early Exercise Features” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 233, 27–35.
12. Barigou, K., Chen, Z., Dhaene, J. (2019). “Fair Valuation of Insurance Liabilities: Merging Actuarial Judgement with Market- and Time-Consistency” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 88, 19–29.

13. Barigou, K., Dhaene, J. (2019). "Fair Valuation of Insurance Liabilities via Mean-Variance Hedging in a Multi-Period Setting" *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2019, no. 2, 163–187.
14. Barndorff-Nielsen, O.E., Graversen, S.E., Jacod, J., Podolskij, M., Shephard, N. (2006). *A Central Limit Theorem for Realised Power and Bipower Variations of Continuous Semimartingales*. In: Kabanov, Y., Lipster, R., Stoyanov, J. (Eds.). *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 33–68.
15. Barrieu, P., Karoui, N.E. (2005). *Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives via Minimization of Risk Measures*. In: Carmona, R. (Ed.). *Indifference Pricing: Theory and Applications*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 77–141.
16. Bayliss P.H., Waters H.R. (1991). "The Analysis of Permanent Health Insurance Data" *Continuous Mortality Investigation Reports*, Vol. 12.
17. Beyersmann, J., Termini, S.D., Pauly, M. (2013). "Weak Convergence of the Wild Bootstrap for the Aalen–Johansen Estimator of the Cumulative Incidence Function of a Competing Risk" *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 40, No. 3, 387–402.
18. Biagini F. (2013). *Evaluating Hybrid Products: The Interplay Between Financial and Insurance Markets*. In: Dalang, R., Dozzi, M., Russo, F. (Eds.). *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VII. Progress in Probability*. Basel: Birkhäuser.
19. Biagini, F., Groll, A., Widenmann, J. (2013). "Intensity-Based Premium Evaluation for Unemployment Insurance Products" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 53, 302–316.
20. Biagini, F., Widenmann, J. (2012). "Pricing of Unemployment Insurance Products with Doubly-Stochastic Markov Chains" *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 15, No. 4, 1250025-1–1250025-32.
21. Biessy, G. (2015). "Long-Term Care Insurance: A Multi-State Semi-Markov Model to Describe the Dependency Process for Elderly People" *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 15, No. 29, 41–74.
22. Billingsley, P. (1987). *Prawdopodobieństwo i miara*, przeł. K. Kizeweter, J.E. Roguski. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
23. Black, F., Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 637–654.
24. Black Jr., K., Skipper Jr., H.D. (2000). *Life and Health Insurance, 13th edition*. Hoboken, NJ: Prentice Hall.
25. Błaszczyszyn B., Rolski T. (2004). *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.
26. Bohnert, A. (2015). "The Impact of Guarantees on the Performance of Pension Saving Schemes: Insights from the Literature" *Risks*, Vol. 3, No. 4, 515–542.

27. Booth, P., Chadburn, R., Haberman, S., James, D. (1999). *Modern Actuarial Theory and Practice*. London: Chapman & Hall.
28. Borch K. (1967), "The Theory of Risk", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B29, no. 3, 432-462.
29. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. (1986). *Actuarial Mathematics*. Schaumburg, IL: Society of Actuaries.
30. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. (1997). *Actuarial Mathematics*, 2nd ed., Schaumburg, IL: Society of Actuaries.
31. Braun, A., Schmeiser, H., Schreiber, F. (2017). "Portfolio Optimization Under Solvency II: Implicit Constraints Imposed by the Market Risk Standard Formula" *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 84, No. 1, s. 177-207.
32. Bruhn, K., and M. Steffensen (2011). "Household Consumption, Investment and Life Insurance", *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 48, 315-325.
33. Buchardt, K. (2013). *Dependent Interest and Transition Rates in Life Insurance*. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen.
34. Buchardt, K., Møller T. (2013). "Life Insurance Cash Ows with Policyholder Behaviour", *Risks*, Vol. 3, No. 3, 290-317
35. Buchardt, K., Møller, T. (2015). "Life Insurance Cash Flows with Policyholder Behavior" *Risks*, Vol. 3, No. 3, 290–317.
36. Buchardt, K., Møller, T., Schmidt, K.B. (2015). "Cash Flows and Policyholder Behaviour in the Semi-Markov Life Insurance Setup" *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2015, No. 8, 660–688.
37. Buckham, D., Wahl, J., Rose, S. (2010). *Executive's Guide to Solvency II*. Hoboken, NJ: Wiley.
38. Carmona, R. (2009). *Indifference Pricing: Theory and Applications*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
39. Chandra, A., Samwick, A.A. (2005). "Disability Risk and the Value of Disability Insurance" *Working Paper*, vol. 11605. National Bureau of Economic Research (NBER), 295-336.
40. Cheridito, P., Delbaen, F., Kupper, M. (2006). "Dynamic Monetary Risk Measures for Bounded Discrete-Time Processes" *Electronic Journal of Probability*, Vol. 11, 57–106.
41. Chiang, C.L. (1984). *The Life Table and its Applications*. Malabar: Krieger Publishing Company.
42. Christiansen, M.C. (2007). "A Sensitivity Analysis Concept for Life Insurance with Respect to a Valuation Basis of Infinite Dimension" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 42, No. 2, 680-690.

43. Christiansen M.C. (2008). "A Sensitivity Analysis of Typical Life Insurance Contracts with Respect to the Technical Basis" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 42, 787–796.
44. Christiansen, M.C. (2010). "Biometric Worst-Case Scenarios for Multi-State Life Insurance Policies" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 47, 190-197.
45. Christiansen, M.C. (2012). "Multistate Models in Health Insurance" *Advances in Statistical Analysis*, Vol. 96, 155-186.
46. Christiansen, M.C., Denuit, M., Lazar, D. (2012). "The Solvency II Square-Root Formula for Systematic Biometric Risk" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 50, 257–265.
47. Christiansen, M.C., Denuit, M.M., Dhaene, J. (2014). "Reserve-dependent benefits and costs in life and health insurance contracts" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 57, 132–137.
48. Christiansen, M.C., Djehiche, B. (2020). "Nonlinear Reserving and Multiple Contract Modifications in Life Insurance" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 93, 187–195.
49. Christiansen, M.C., Henriksen, L.F.B., Schomacker, K.J., Steffensen, M. (2016). "Stress Scenario Generation for Solvency and Risk Management" *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2016, No. 6, 502–529.
50. Chrzan, P. (1998a). *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*. Katowice: Wydawnictwo GigaNet Sp. z o.o.
51. Chrzan P. (1998b). *Ubezpieczenia na życie. Analiza aktuarialna*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego.
52. Cocco, J.F., Gomes, F.J. (2012). "Longevity Risk, Retirement Savings, and Financial Innovation" *Journal of Financial Economics*, Vol. 103, 507-529.
53. Courbage, C., Roudaut, N. (2011). "Long-Term Care Insurance: The French Example" *European Geriatric Medicine*, Vol. 2, No. 1, 22–25.
54. Czado, C., Rudolph, F. (2002). "Application of Survival Analysis Methods to Long-Term Care Insurance" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 31, No. 3, 395–413.
55. Černy, A., Kallsen, J. (2009). "Hedging by Sequential Regressions Revisited" *Mathematical Finance*, Vol. 19, No. 4, 591–617.
56. Dahl, M., Møller, T. (2006). "Valuation and Hedging of Life Insurance Liabilities with Systematic Mortality Risk" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 39, 193–217.
57. Dale, S., Borowiak, A., Shapiro, F. (2014). *Financial and Actuarial Statistics and Introduction*. New York: CRC Press, Taylor & Francis.

58. D'Amico, G., Guillen, M., Manca, R. (2009). "Full Backward Non-Homogeneous Semi-Markov Processes for Disability Insurance Models: a Catalunya Real Data Application" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 45, 173–179.
59. D'Amico, G., Guillen, M., Manca, R. (2013). "Semi-Markov Disability Insurance Models" *Communications in Statistics – Theory and Methods*, Vol. 42, No. 16, 2872–2888.
60. D'Amico, G., Petroni, F., Prattico, F. (2012). "Performability Analysis of the Second Order Semi-Markov Chains in State and Duration for Wind Speed Modeling". Presented at SMT-DA in June 2012.
61. D'Amico, G., Petroni, F., Prattico, F. (2013). "First and Second Order Semi-Markov Chains for Wind Speed modeling" *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 392, No. 5, 1194–1201.
62. De Giovanni, D. (2010). "Lapse Rate Modeling: A Rational Expectation approach" *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2010, No. 1, 56-67.
63. Delbaen, F., Schachermayer, W. (2006). *The Mathematics of Arbitrage*. Berlin-Heidelberg: Springer Science & Business Media.
64. Delong Ł. (2013). *Backward Stochastic Differential Equations with Jumps and Their Actuarial and Financial Applications*. Berlin-Heidelberg: Springer.
65. Delong, Ł., Dhaene, J., Barigou, K. (2019a). "Fair Valuation of Insurance Liability Cash-Flow Streams in Continuous Time: Applications", *ASTIN Bulletin*, Vol. 49, No. 2, 299–333.
66. Delong, Ł., Dhaene, J., Barigou, K. (2019b). "Fair Valuation of Insurance Liability Cash-Flow Streams in Continuous Time: Theory" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 88, 196–208.
67. De Moivre, A. (1725). *In Annuities on Lives*. London: H&S.
68. Deshmukh, S. (2012). *Multiple Decrement Models in Insurance. An Introduction Using R*. Berlin-Heidelberg: Springer.
69. Dhaene, J. (1990). "Distributions in Life Insurance" *ASTIN Bulletin*, Vol. 20, No. 1, 81-92.
70. Dhaene, J., Stassen, B., Barigou, K., Linders, D., Chen, Z. (2017). "Fair Valuation of Insurance Liabilities: Merging Actuarial Judgement and Market-Consistency" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 76, 14–27.
71. Dickson, D., (2006). "Premiums and Reserves for Life Insurance Products" *Australian Actuarial Journal*, Vol. 12, No. 2, 259.
72. Dickson, D., Hardy, M.R., Waters, H.R. (2020). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge: Cambridge University Press.
73. Djehiche, B., Löfdahl, B. (2014). "Risk Aggregation and Stochastic Claims Reserving in Disability Insurance" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 59, 100–108.
74. Doan, O. (red.) (1995). *Ubezpieczenia życiowe*. Warszawa: Poltext.

75. Dufresne, D. (2013). “Stochastic Life Annuities” *North American Actuarial Journal*, Vol. 11, No. 1, 2007, 136-157.

76. Eling, M. and D. Kiesenbauer (2013). “What Policy Features Determine Life Insurance Lapse? An Analysis of the German Market” *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 81, No. 2, 241-269.

77. Emms, P., Haberman, S. (2005). “Pricing General Insurance Using Optimal Control Theory” *ASTIN Bulletin*, Vol. 35, No. 2, 427–453.

78. Emms, P., Haberman, S., Savoulli, I. (2007). “Optimal Strategies for Pricing General Insurance” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 40, No. 1, 15–34.

79. Engsner, H., Lindensjö, K., Lindskog, F. (2017). “Insurance Valuation: A Computable Multiperiod Cost-of-Capital Approach” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 72, 250–264.

80. Engsner, H., Lindensjö, K. and Lindskog, F. (2020). “The Value of a Liability Cash Flow in Discrete Time Subject to Capital Requirements”. *Finance and Stochastics*, Vol. 24, https://link.springer.com/article/10.1007/s00780-019-00408-0. Submitted 20.04.2020.

81. Engsner, H., Lindskog, F. (2018). “Continuous-Time Limits of Multi-Period Cost-of-Capital Valuations” *Research Reports / Mathematical Statistics*, Vol. 11, 1-37.

82. Feller, W. (1980). *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, przeł. R. Bartoszyński, R. Bielecki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

83. Fong, J.H., Shao, A.W., Sherris, M. (2015). “Multistate Actuarial Models of Functional Disability” *North American Actuarial Journal*, Vol. 19, 1, 41–59.

84. Friedman, A., (2012). *Stochastic Differential Equations and Applications*. New York: Courier Dover Publications.

85. Gatzert, N., (2009). “Implicit Options in Life Insurance: An Overview” *Zeitschrift die gesamte Versicherungswissenschaft*, Vol. 98, No. 2, 141–164.

86. Gerber, H.U. (1995). *Life Insurance Mathematics*. Berlin: Springer.

87. Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Berlin: Springer.

88. Gompertz B. (1825). “On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 115, 513–585.

89. Grandell, J. (1992). *Aspects of Risk Theory*. New York: Springer.

90. Grosen, A. and P.L. Jørgensen (2000). “Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options, and Bonus Policies” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 26, No. 1, 37-57.

91. Guibert, Q., Planchet, F. (2018). “Non-Parametric Inference of Transition Probabilities Based on Aalen–Johansen Integral Estimators for Acyclic Multi-State Models: Application to LTC Insurance” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 82, 21-36.

92. Guillén, M., Konicz, A.K., Nielsen, J.P., Pérez-Marín, A.M. (2013). “Do Not Pay for a Danish Interest Guarantee. The Law of the Triple Blow” *Annuals of Actuarial Science*, Vol. 7 192–209.

93. Guillén, M., Nielsen, J.P., Pérez-Marín, A.M., Petersen, K.S. (2013). “Performance Measurement of Pension Strategies: A Case Study of Danish Life-Cycle Products” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2013, No. 1, 49–68.

94. GUS (2018). *Międzynarodowa Statystyczna Klasyfikacja Chorób i Problemów Zdrowotnych – ICD-10*, https://dane.gov.pl (dostęp: 06.2019).

95. Haberman, S., Butt, Z., Rickayzen, B. (2001). “Multiple State Models, Simulation and Insurer Insolvency” *Actuarial Research Papers*, No. 136.

96. Haberman, S., Pitacco, E. (1999). *Actuarial Models for Disability Insurance*. London: Chapman & Hall/CRC.

97. Hambel, C., Kraft, H., Schendel, L., Steffensen, M. (2017). “Life Insurance Demand Under Health Shock Risk” *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 84, No. 4, 1171–1202.

98. Handschke, J., Monkiewicz, J. (red.) (2010). *Ubezpieczenia. Podręcznik akademicki*, Warszawa: Poltext.

99. Happ, S., Merz, M., Wüthrich, M.V. (2015). “Best-Estimate Claims Reserves in Incomplete Markets” *European Actuarial Journal*, Vol. 5, No. 1, 55–77.

100. Hardy M.R. (2000). “Hedging and Reserving for Single-Premium Segregated Fund Contracts” *North American Actuarial Journal*, Vol. 4, No. 2, 63-74.

101. Harrison M. (1997). “Ruin Problems with Compounding Assets” *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 5, 67-79.

102. Hausdorff F. (1897). “Das Risico bei Zufallsspielen. Ber. uber die Verhandlungen der Königl.” *Math.-phys. Classe,* Vol. 49, 497-548.

103. Heath, D., Schweizer, M. (2000). “Martingales versus PDEs in Finance: An Equivalence Result with Examples” *Journal of Applied Probability*, Vol. 37, No. 4, 947–957.

104. Heilpern S. (1998). *Analiza zmiennych losowych występujących w procesie ryzyka z uwzględnieniem ubezpieczeń o wysokim wskaźniku szkodowości*. (w:) Ronka-Chmielowiec, W. (red.). *Analiza i metody zmniejszania ryzyka w polskim systemie ubezpieczeń*. Wrocław: Wydawnictwo AE.

105. Heilpern S. (2000). *Analiza stanu polskiego rynku ubezpieczeń na życie*. (w:) Ronka-Chmielowiec, W. (red.). *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach*. Wrocław: Wydawnictwo AE.

106. Helms, F., Czado, C., Gschlößl, S., (2005). “Calculation of LTC Premiums Based on Direct Estimates of Transition Probabilities” *Astin Bulletin*, Vol. 35, No. 02, 455–469.

107. Henriksen, F., Nielsen, J.W., Steffensen, M, Svensson, C. (2014). “Markov Chain Modeling of Policy Holder Behavior in Life Insurance and Pension” *European Actuarial Journal*, Vol. 4, 1–29.

108. Hesselager, O. (1994). “A Markov Model for Loss Reserving” *ASTIN Bulletin*, Vol. 24, No. 2, 183-193.

109. Hesselager, O., Norberg, R. (1996). “On Probability Distributions of Present Values in Life Insurance” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 18, 35-42.

110. Hodges, S.D., Neuberger, A. (1989). “Optimal Replication of Contingent Claims under Transaction Costs” *Review of Futures Markets*, Vol. 8, No. 2, 222–239.

111. Hoem, J.M., (1969). “Markov Chain Models in Life Insurance” *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, Vol. 9, 91–107.

112. Hoem, J.M., (1988). *The Versatility of the Markov Chain as a Tool in the Mathematics of Life Insurance*. Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries R, 171–202

113. Hoem, J.M., Aalen, O.O. (1978). “Actuarial Values of Payment Streams” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1978, no. 1, 38-47.

114. Homa M. (2004). *Składki w ubezpieczeniach wieloopcyjnych*. (w:) Ostasiewicz, W. (red.). *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*. Wrocław: Wydawnictwo AE.

115. Homa M. (2011). „Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie. Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku” *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego* nr 228. *Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku*, 168-178.

116. Homa M. (2012). „Cena a ryzyko w wieloopcyjnych ubezpieczeniach na życie”. *Studia Ekonomiczne* nr 109. *Finanse w niestabilnym otoczeniu – dylematy i wyzwania*, 79-94.

117. Homa M. (2013). „Rozkład wypłaty w ubezpieczeniu na życie z funduszem kapitałowym a ryzyko finansowe” *Prace Naukowe UE* nr 312. *Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*.

118. Homa M. (2014). *Rynek ubezpieczeń na życie*. (w:) Banaszczyk-Soroka, U. *Rynki finansowe. Organizacja, instytucje, uczestnicy*. Warszawa: Wydawnictwo C.H. Beck.

119. Hong, J.H., and J.-V. Ríos-Rull (2012). “Life Insurance and Household Consumption” *American Economic Review*, Vol. 102, 3701-3730.

120. Hougaard, P. (1999). “Multi-State Models: A Review” *Lifetime Data Analysis*, Vol. 5, No. 3, 239-264.

121. Hougaard, P. (2001). *Analysis of Multivariate Survival Data*. New York: Springer-Verlag.

122. Huang, H., M.A. Milevsky, and T.S. Salisbury (2012). “Optimal Retirement Consumption with a Stochastic Force of Mortality” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 51, 282-291.

123. Iosifescu, M. (1988). *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, przeł J. Wesołowski. Warszawa: PWN.

124. Jackson, C.H. (2011). "Multi-State Models for Panel Data: the msm Package for R" *Journal of Statistical Software*, Vol. 38, No. 8, 1–29.

125. Jacod, J. (2008). "Asymptotic Properties of Realized Power Variations and Related Functionals of Semimartingales" *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 118, No. 4, 517–559.

126. Jajuga, K., Jajuga, T. (2006). *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Warszawa: PWN.

127. Janssen, J., Manca, R. (2001). "Numerical Solution of Non-Homogeneous Semi-Markov Processes in Transient Case" *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 3, 271–293

128. Janssen J., Manca R. (2002). "General Actuarial Models in a Semi-Markov Environment" Proceedings of ICA Cancun 2002, Mexico – 10.02.2020.

129. Janssen, J., Manca, R. (2006). *Applied Semi-Markov Processes*. Berlin-Heidelberg: Springer.

130. Janssen, J., Manca, R. (2007). *Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability*. New York: Springer-Verlag.

131. Jensen, N.R. (2016). "Scenario-Based Life Insurance Prognoses in a Multi-State Markov Model" *European Actuarial Journal*, Vol. 6, 307–330.

132. Jensen, N.R., Schomacker, K.J. (2015). "A Two-Account Life Insurance Model for Scenario--Based Valuation Including Event Risk" *Risks*, Vol. 3, No. 2, 183–218.

133. Ji, M., Hardy, M.R., Li, J.S. (2012). "A Semi-Markov Multiple State Model for Reverse Mortgage Terminations" *Annals of Actuarial Science*, Vol. 6 No. 2, 235-257.

134. Jørgensen, P.L., Linnemann, P. (2012). "A Comparison of Three Different Pension Savings Products with Special Emphasis on the Payout Phase" *Annuals of Actuarial Science*, Vol. 6, 137–152.

135. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M., (2008). *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*. Berlin-Heidelberg: Springer Science & Business Media.

136. Karoui, N., Peng, S., Quenez, M.C. (1997). "Backward Stochastic Differential Equations in Finance" *Mathematical Finance*, Vol. 7 No. 1, 1–71.

137. Koller M. (2012). *Stochastic Models in Life Insurance*. Berlin-Heidelberg: Springer.

138. Kraft, H., and M. Steffensen (2008). "Optimal Consumption and Insurance: A Continuous-Time Markov Chain Approach" *ASTIN Bulletin*, Vol. 28, 231-257.

139. Król, A., Saint-Pierre, P. (2015). "SemiMarkov: An R Package for Parametric Estimation in Multi-State Semi-Markov Models" *Journal of Statistical Software*, Vol. 66, No. 6, 1–16.

140. Krzyśko, M. (1996). *Statystyka matematyczna*. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Adama Mickiewicza.

141. Kuo, W., Tsai, C., and W.-K. Chen (2003). "An Empirical Study on the Lapse Rate: The Cointegration Approach" *Journal on Risk and Insurance*, Vol. 70, No. 3, 489-508.

142. Kwona, H.S., Jones, B.L. (2008). "Applications of a Multi-State Risk Factor/Mortality Model in Life Insurance" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 43, 394–402.

143. Laeven, R., Stadje, M. (2014). "Robust Portfolio Choice and Indifference Valuation. Mathematics of Operation Research", Vol. 39, No. 4, 949–1348.

144. Levantesi, S., Menzietti, M. (2012). "Managing Longevity and Disability Risks in Life annuities with Long Term Care" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 50, No. 3, 391–401.

145. Lindset, S., Persson, S.-A. (2009). "Continuous Monitoring: Does Credit Risk Vanish?" *ASTIN Bulletin*, Vol. 39, 577–589.

146. London, D. (1988). *Survival Models and Their Estimation*. Winsted: ACTEX Publications.

147. Maegebier, A. (2013). "Valuation and Risk Assessment of Disability Insurance Using a Discrete Time Trivariate Markov Renewal Reward Process" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 53, 802–811.

148. Makeham, W.M. (1860). "On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables" *Journal of the Institute of Actuaries and the Assurance Magazine*, Vol. 8, 301–310.

149. Malamud, S., Trubowitz, E., Wüthrich, M., (2008). "Market Consistent Pricing of Insurance Products" *ASTIN Bulletin*, Vol. 38, No. 2, 483–526.

150. Marcus C. (2010). "Biometric Worst-Case Scenarios for Multi-State Life Insurance Policies" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 47, 190–197.

151. Martin-Löf, A. (1986). "A Stochastic Theory of Life Insurance" *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1986, No. 2, 65-81.

152. Matłoka, M. (1997). *Matematyka w ubezpieczeniach na życie*. Poznań: Wydawnictwo WSB.

153. Meira-Machado, L., Roca-Pardinas, J. (2011) "Analyzing Survival Data from an Illness-Death Model" *Journal of Statistical Software*, Vol. 38, No. 3, 1–18.

154. Melnikov A. (2011). *Risk Analysis in Finance and Insurance*. London: CRC Press, Taylor & Francis Group.

155. Merton, R.C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case" *Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, 247-257.

156. Międzynarodowa klasyfikacja chorób i problemów zdrowotnych ICD-10, https://ezdrowie.gov.pl/portal/home/dla-dostawcow/klasyfikacje [dostęp: 05.02.2020].

157. Milbrodt, H. (1993). “Multiple Decrement Life Tables, Competing Risk Models, Independent Probabilities – Some Relations” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 13, No. 2, 148-149.

158. Milbrodt, H. (1999). “Hattendorff’s Theorem for Non-Smooth Continuous-Time Markov Models I: Theory” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 25, 181-195.

159. Milbrodt, H., Stracke, A., (1997). “Markov Models and Thiele’s Integral Equations for the Prospective Reserve” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 19, No. 3, 187–235.

160. Møller, C.M., (1993). “A Stochastic Version of Thiele’s Differential Equation” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1993, No. 1, 1–16.

161. Møller, T., Steffensen, M. (2002). “Intervention Options in Life-Insurance” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 85, 31-71.

162. Møller, T., Steffensen, M. (2007). *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*. Cambridge: Cambridge University Press.

163. Möhr, C. (2011). “Market-Consistent Valuation of Insurance Liabilities by Cost of Capital” *ASTIN Bulletin*, Vol. 41, 315–341.

164. Morlais, M.-A. (2010). “A New Existence Result for Quadratic BSDEs with Jumps with Application to the Utility Maximization Problem” *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 120, No. 10, 1966–1995.

165. Norberg, R. (1990). “Payment Measures, Interest, and Discounting” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1990, No. 1, 14-33.

166. Norberg, R. (1991). “Reserves in Life and Pension Insurance” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1991, No. 1, 3-24.

167. Norberg, R. (1992). “Hattendorff’s Theorem and Thiele’s Differential Equation Generalized” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1992, No. 1, 2-14.

168. Norberg, R. (1993). “Identities for Present Values of Life Insurance Benefits” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1993, No. 2, 100-106.

169. Norberg, R. (1995a). “A Time-Continuous Markov Chain Interest Model with Applications to Insurance” *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, Vol. 11 245-256.

170. Norberg, R. (1995b). “Differential Equations for Moments of Present Values in life Insurance” *Insurance: Mathematics & Economics*, Vol. 17, 171-180.

171. Norberg, R. (1996). “Addendum to Hattendorff’s Theorem and Thiele’s Differential Equation Generalized” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1996, No. 1, 50-53.

172. Norberg, R. (1999). “Ruin Problems with Assets and Liabilities Type” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1999, No. 2, 255-269.

173. Norberg, R (2001). “On Bonus and Bonus Prognoses in Life Insurance” *Scandinvian Actuarial Journal*, Vol. 2001, No. 2 126–147.

174. Norberg, R. (2004a). “Life Insurance Mathematics”, http://stats.lse.ac.uk/norberg/links/papers/LIM-eas.pdf [dostęp 05.07.2014].
175. Norberg, R. (2004b) “The Markov Chain Market”, http://stats.lse.ac.uk/norberg/links/publications.html [dostęp: 05.02.2014].
176. Norberg, R. (2005). “Anomalous PDEs in Markov Chains: Domains of Validity and Numerical Solutions,” *Finance and Stochastic*, Vol. 9, 519–537.
177. Norberg, R. (2014). “Life Insurance Mathematics”. (in:) Wiley StatsRef: Statistics Reference Online.
178. Norberg, R., Steffensen, M. (2005). “What Is the Time Value of a Stream of Investments?” *Journal of Applied Probability*, Vol. 42, 861-866, https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat04351.
179. Olivieri, A., Pitacco, E. (2009). “Stochastic Models for Disability: Approximations and Applications to Sickness and Personal Accident Insurance” *The ICFAI University Journal of Risk and Insurance*, Vol. 6, No. 2, 19–43.
180. Ostasiewicz, S. (2000). *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach na życie*. Wrocław: Wydawnictwo AE.
181. Ostasiewicz, S. (2003a). *Elementy aktuariatu*. Wrocław: Wydawnictwo AE.
182. Ostasiewicz, S. (2003b). *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*. Wrocław: Wydawnictwo AE.
183. Ostasiewicz, W. (red.) (2000). *Modele aktuarialne*. Wrocław: Wydawnictwo AE.
184. Ostasiewicz, W. (red.) (2004). *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*. Wrocław: Wydawnictwo AE.
185. Pantelous, A.A., Passalidou, E. (2015). “Optimal Premium Pricing Strategies for Competitive General Insurance Markets” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 259, 858–874.
186. Papatriandafylou, A., Waters, H.R. (1984). “Martingales in Life Insurance” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2014, No. 4, 210-230.
187. Parker, G. (1993). “Distribution of the Present Value of Future Cash Flows” “Proceedings of the3rd AFIR International Colloquium, Rome”, 831-843.
188. Parker, G. (1994a). “Moments of the Present Values of a Portfolio of Policies” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1994, No. 1, 53-67.
189. Parker, G. (1994b). “Stochastic Analysis of Portfolio of Endowment Insurance Policies”, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1994, No. 2, 119-130.
190. Pelsser, A. (2010). “Time-Consistent and Market-Consistent Actuarial Valuations”, https://ssrn.com/abstract=1551323 [dostęp 10.02.2020].
191. Pelsser, A., Ghalehjooghi, A.S. (2016). “Time-Consistent Actuarial Valuations” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 66, 97–112.

192. Pelsser, A., Stadje, M. (2014). "Time-Consistent and Market-Consistent Evaluations" *Mathematical Finance*, Vol. 24, 25–65.

193. Pitacco, E. (1995). "Actuarial Models for Pricing Disability Benefits: Towards a Unifying Approach" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 16, 39–62.

194. Pitacco, E. (2004). *Disability insurance*. (in:) Teufels, J.L., Sundt, B. (Eds.), *Encyclopedia of Actuarial Science*, Vol. 1. Chichester: John Wiley & Sons, 530–541.

195. Pritchard, D.J. (2006). "Modeling Disability in Long-Term Care Insurance" *North American Actuarial Journal*, Vol. 10, No. 4, 48–75. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2006.10597413.

196. Podgórska, M., Śliwka, P., Topolewski, M., Wrzosek, M. (2002). *Łańcuchy Markowa w teorii i w zastosowaniach*. Warszawa: SGH.

197. Ramlau-Hansen, H. (1988). "Hattendorff's Theorem: a Markov Chain and Counting Process Approach" *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1988, No. 1-3, 143-156.

198. Ramlau-Hansen, H. (2003). "Distribution of Surplus in Life Insurance" *ASTIN Bulletin*, Vol. 21, No. 1, 57-71.

199. Rogers, L.C.G., Williams, D. (2000). *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Vol. 2: *Itô Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press.

200. Ronka-Chmielowiec, W. (1997). *Ryzyko w ubezpieczeniach – metody oceny*. Wrocław: Wydawnictwo AE.

201. Ronka-Chmielowiec, W. (2003). *Modelowanie ryzyka w ubezpieczeniach. Wybrane zagadnienia*, Wrocław: Wydawnictwo AE.

202. Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1998). *Stochastic Process for Insurance and Finance*. Chichester: Wiley.

203. Rosazza Gianin, E., (2006). "Risk Measures via G-Expectations" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 39, No. 1, 19–34.

204. Rotar, V. (2015). *Actuarial Models. The Mathematics of Insurance*, 2nd edition. New York: CRC Press, Taylor & Francis.

205. Sandström, A., (2010). *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice*. London: Chapman & Hall.

206. Scott, W.F. (1999). *Life Assurance Mathematics*. Edinburg: Heriot-Watt University.

207. Skałba, M. (1999). *Ubezpieczenia na życie*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.

208. Stadje, M. (2010). "Extending Dynamic Convex Risk Measures from Discrete Time to Continuous Time: A Convergence Approach" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 47, No. 1, 391–404.

209. Steffensen, M. (2000). "A No Arbitrage Approach to Thiele's Differential Equation" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 27, 201-214.

210. Steffensen, M. (2002). "Intervention Options in Life Insurance" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 31, 71-85.

211. Steffensen, M. (2004). "On Merton's Problem for Life Insurers" *ASTIN Bulletin*, Vol. 34, No. 1, 5–25.

212. Steffensen, M. (2006). "Quadratic Optimization of Life and Pension Insurance Payments" *ASTIN Bulletin*, Vol. 36, No. 1, 245–267.

213. Steffensen, M., Waldstrøm, S. (2009). "A Two-Account Model of Pension Saving Contracts" *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2009, No. 3,169–186.

214. Stenberg, F., Manca, R., Silvestrov, D. (2007). "An Algorithmic Approach to Discrete Time Non-Homogeneous Backward Semi-Markov Reward Processes with an Application to Disability Insurance" *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 9, 497–519.

215. Stroiński, E. (1996). *Ubezpieczenie na życie*. Warszawa: WSUiB.

216. Stroiński, E. (2006). „Zmienne losy ubezpieczeń na życie w Polsce w minionym czterdziestoleciu" *Wiadomości Ubezpieczeniowe*, nr 75, 263-273.

217. Szekli, R. (1995). *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*. New York: Springer-Verlag.

218. Szkutnik, W. (1998*). Aktuarialna analiza w ubezpieczeniach życiowych*. Katowice: Wydawnictwo AE.

219. Szkutnik, W. (2003). *Wybrane modele w zarządzaniu ryzykiem ubezpieczeniowym w ujęciu probabilistycznym*. Katowice: Wydawnictwo AE.

220. Śliwiński, A. (2002). *Ryzyko ubezpieczeniowe*. Warszawa: Poltext.

221. Tetens, J.N. (1978). *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften*. Leipzig: Weidmanns Erben und Reich.

222. Tomas, J., Planchet, F. (2013). "Multidimensional Smoothing by Adaptive Local Kernel Weighted Log-Likelihood: Application to Long-Term Care Insurance" *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 52, No. 3, 573–589.

223. Warunki ogólne ubezpieczeń indywidualnych, http://www.apmlicolife.pl, [dostęp 10.02.2020].

224. Warunki ogólne ubezpieczeń indywidualnych, http://www.cu.com., http://www.apmlicolife.pl, [dostęp 10.02.2020].

225. Warunki ogólne ubezpieczeń indywidualnych, http://www.pzuzycie, http://www.apmlico life.pl, [dostęp 10.02.2020].

226. Waters, H.R., (1978). "The Moments and Distributions of Actuarial Functions" *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 105, No. 1, 61-75.

227. Waters, H.R., (1989). "Some Aspects of the Modeling of Permanent Health Insurance" *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 116, No. 3, 611-624.

228. Wolthuis, H. (1987). “Hattendorff’s Theorem for a Continuous-Time Markov Model” *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1987, No. 3-4, 157-175.

229. Wolthuis, H. (2003). *Life Insurance Mathematics (The Markovian Model)*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

230. Wolthuis, H., Hoem, J.M. (1990). “The Retrospective Premium Reserve” *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 9, 229-234.

Akty prawne

231. Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II) (Dz. U. UE L 335 z 17.12.2009 r.).

232. Podział ryzyka według działów, grup i rodzajów ubezpieczeń. Załącznik do Ustawy z dnia 22 maja 2003 r. o działalności ubezpieczeniowej.

233. Rozporządzenie delegowane Komisji (UE) 2016/467 z dnia 30 września 2015 r. zmieniające rozporządzenie (UE) 2015/35 w zakresie obliczania regulacyjnych wymogów kapitałowych w odniesieniu do kilku kategorii aktywów posiadanych przez zakłady ubezpieczeń i zakłady reasekuracji (Dz. U. UE L 85 z 1.4.2016 r.).

234. Rozporządzenie delegowane Komisji (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II) (Dz. U. UE L 12 z 17.1.2015 r. ze zm.).

235. Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 12 kwietnia 2016 r. w sprawie szczególnych zasad rachunkowości zakładów ubezpieczeń i zakładów reasekuracji (Dz. U. z 2016 r. poz. 562).

236. Rozporządzenie Ministra Rozwoju i Finansów w sprawie dokumentów załączanych do zawiadomień o zamiarze nabycia lub objęcia akcji lub praw z akcji krajowego zakładu ubezpieczeń lub krajowego zakładu reasekuracji lub o zamiarze stania się jednostką dominującą takiego zakładu (Dz. U. z 2016 r. poz. 1772).

237. Ustawa z dnia 14 czerwca 1960 r. – Kodeks postępowania administracyjnego (Dz. U. z 2016 r., poz. 23 ze zm.).

238. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. – Kodeks cywilny (t. j. Dz. U. z 2017 r. poz. 459).

239. Ustawa z 20 września 1984 r. o ubezpieczeniach majątkowych i osobowych (Dz. U. Nr 45, poz. 242 ze zm.).

240. Ustawa z dnia 17 maja 1989 r. o zmianie ustawy o ubezpieczeniach majątkowych i osobowych (Dz. U. z 1989 r. Nr 30, poz. 160).

241. Ustawa z dnia 28 lipca 1990 r. o działalności ubezpieczeniowej (Dz. U. z 1996 r. Nr 11, poz. 62 z późn. zm.).

242. Ustawa z dnia 28 lipca 1990 r. o działalności ubezpieczeniowej (Dz. U. z 1990 r. Nr 59, poz. 344).
243. Ustawa z dnia 29 września 1994 r. o rachunkowości (Dz. U. z 2016 r. poz. 1047 ze zm.).
244. Ustawa z dnia 8 czerwca 1995 r. o zmianie ustawy o działalności ubezpieczeniowej (Dz. U. Nr 96, poz. 478).
245. Ustawa z dnia 10 grudnia 1998 r. o zmianie ustawy o działalności ubezpieczeniowej (Dz. U. Nr 155, poz. 1015).
246. Ustawa z dnia 15 września 2000 r. – Kodeks spółek handlowych (t. j. Dz. U. z 2016 r. poz. 1578 ze zm.).
247. Ustawa z dnia 22 maja 2003 r. o działalności ubezpieczeniowej (t. j. Dz. U. z 2013 r., poz. 950).
248. Ustawa z dnia 22 maja 2003 r. o ubezpieczeniach obowiązkowych, Ubezpieczeniowym Funduszu Gwarancyjnym i Polskim Biurze Ubezpieczycieli Komunikacyjnych (t. j. Dz. U. z 2016 r. poz. 2060 ze zm.).
249. Ustawa z dnia 22 maja 2003 r. o pośrednictwie ubezpieczeniowym (t. j. Dz. U. z 2016 r. poz. 2077 ze zm.).
250. Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej (t. j. Dz. U. z 2016 r. poz. 1829 ze zm.).
251. Ustawa z dnia 15 kwietnia 2005 r. o nadzorze uzupełniającym nad instytucjami kredytowymi, zakładami ubezpieczeń, zakładami reasekuracji i firmami inwestycyjnymi wchodzącymi w skład konglomeratu finansowego (t. j. Dz. U. z 2016 r. poz. 1252).
252. Ustawa z dnia 16 listopada 2006 r. o opłacie skarbowej (t. j. Dz. U. z 2016 r. poz. 1827 ze zm.).
253. Ustawa z dnia 11 września 2015 r. o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Dz. U. z 2015 r. poz. 1844, ze zm.).

Aneks A1. Podstawowe pojęcia

W dodatku tym zawarto podstawowe pojęcia związane z ubezpieczeniami na życie. Ze względu na obszerność niektórych pojęć zostały one przedstawione w świetle ubezpieczeń na życie i dożycie, które są przedmiotem zainteresowań w pracy.

Całkowite trwałe inwalidztwo – obrażenia ciała lub choroba powodujące trwałą i całkowitą niezdolność do wykonywania jakiejkolwiek pracy zarobkowej przez okres ustalony w ogólnych warunkach ubezpieczenia.

Nieszczęśliwy wypadek – nagłe zdarzenie, wywołane działającą nagle i niezależnie od woli ubezpieczonego przyczyną zewnętrzną, w wyniku którego ubezpieczony doznał uszkodzenia ciała, rozstroju zdrowia lub zmarł.

Ochrona ubezpieczeniowa – prawne zobowiązanie towarzystwa ubezpieczeniowego do wypłaty stosownych świadczeń finansowych w przypadku wystąpienia zdarzeń przewidzianych polisą ubezpieczenia.

Ogólne warunki ubezpieczenia (OWU) – przepisy ubezpieczeniowe, tworzone przez poszczególne towarzystwa ubezpieczeniowe, regulujące wzajemne prawa i obowiązki stron ubezpieczenia, określające podmiot i zakres ubezpieczenia, zakres i czas trwania ochrony ubezpieczeniowej, sposób ustalania zdarzeń oraz wypłaty świadczeń.

Okres ubezpieczenia – liczba lat, na jakie zostało zawarte ubezpieczenie.

Opcje – patrz ubezpieczenia dodatkowe.

Polisa ubezpieczeniowa – dokument wydawany przez ubezpieczyciela w celu potwierdzenia zawarcia umowy.

Portfel ubezpieczeń – zbiór ubezpieczeń prowadzonych przez towarzystwo ubezpieczeniowe w danym okresie.

Przypadek życiowy – różne zdarzenia losowe zachodzące w życiu człowieka.

Renta kapitałowa – okresowe świadczenie pieniężne wypłacane regularnie przez ZUS ubezpieczonemu, po osiągnięciu wieku emerytalnego lub w innym uzgodnionym okresie.

Ryzyko – niebezpieczeństwo i możliwość wystąpienia określonego zdarzenia losowego (śmierci lub trwałego uszczerbku na zdrowiu), które zobowiązuje towarzystwo do wypłaty świadczenia.

Składka ubezpieczeniowa netto – tzw. cena za ryzyko ustalona wg zasady równoważności, zgodnie z którą składka netto równa jest wartości oczekiwanej zaktualizowanych przyszłych świadczeń wynikających z zawartej umowy ubezpieczenia.

Składka brutto – kwota pieniężna, którą ubezpieczający jest zobowiązany zapłacić ubezpieczycielowi za udzieloną przez niego ochronę.

Suma ubezpieczenia – wysokość przyszłego świadczenia, jakie zobowiązuje się wypłacić ubezpieczyciel na wypadek śmierci osoby ubezpieczonej albo w razie dożycia przez osobę ubezpieczoną umówionego wieku.

Świadczenie – według przepisów kodeksu cywilnego jest to zobowiązanie wynikające z zawartej umowy ubezpieczenia, które polega na wypłacie określonej w umowie kwoty pieniężnej w razie zajścia przewidzianego w umowie zdarzenia losowego.

Ubezpieczenia dodatkowe – ubezpieczenie uzupełniające podstawowy zakres ochrony ubezpieczeniowej.

Ubezpieczenie na całe życie – ubezpieczenie na życie, które zachowuje ważność przez całe życie osoby ubezpieczonej, pod warunkiem opłacania składek zgodnie z postanowieniami polisy.

Ubezpieczenie na życie (terminowe) – ubezpieczenie na życie, w ramach którego świadczenie jest wypłacane tylko w przypadku, gdy osoba ubezpieczona umrze w określonym czasie.

Ubezpieczenie na dożycie – ubezpieczenie z grupy na życie, które przewiduje wypłatę świadczenia, gdy ubezpieczony dożyje określonego wieku.

Ubezpieczenie mieszane (ubezpieczenie na życie i dożycie) – rodzaj ubezpieczenia na życie przewidujący wypłatę świadczenia, jeżeli śmierć nastąpi w ciągu określonej liczby lat lub ubezpieczony dożyje określonego wieku.

Ubezpieczenie wieloopcyjne – umowa ubezpieczenia obejmująca różne przypadki życiowe.

Ubezpieczający – osoba, która zawarła umowę ubezpieczenia i zobowiązana jest do opłacania składek. Może to być umowa ubezpieczenia osoby trzeciej lub na życie ubezpieczającego (w tym przypadku ubezpieczający jest jednocześnie ubezpieczonym).

Ubezpieczony – osoba, której życie, zdrowie i zdolność do pracy są przedmiotem ubezpieczenia.

Ubezpieczyciel – według ustawy o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej jest to podmiot prowadzący, za zezwoleniem organu państwowego, działalność ubezpieczeniową w formie spółki akcyjnej albo w formie towarzystwa ubezpieczeń wzajemnych.

Umowa ubezpieczenia – według kodeksu cywilnego przez umowę ubezpieczenia zakład ubezpieczeń zobowiązuje się wypłacić określone świadczenie w razie zajścia przewidzianego w umowie wypadku, a ubezpieczający zobowiązuje się zapłacić składkę.

Uposażony, uprawniony – osoba imiennie wskazana w polisie ubezpieczeniowej lub okaziciel polisy uprawniony do otrzymania określonej sumy ubezpieczenia na wypadek śmierci ubezpieczonego.

Wartość polisy – wspólna zaktualizowana wartość przyszłych składek i świadczeń liczona na początku okresu ubezpieczenia.

Wiek wstępu – wiek osoby przystępującej do ubezpieczenia określany w latach, stanowiących różnicę między początkiem roku kalendarzowego, w którym zawierana jest umowa ubezpieczenia, a rokiem urodzenia osoby ubezpieczonej.

Wypadek ubezpieczeniowy – zdarzenie losowe objęte ochroną ubezpieczeniową, po zajściu którego ubezpieczyciel wypłaca na mocy umowy świadczenie.

Publikacje z dyscypliny ekonomia i finanse, które ukazały się w e-Wydawnictwie WPAE UWr

Sebastian Jakubowski, *Prawno-ekonomiczne aspekty gromadzenia i lokowania środków przez otwarty fundusz emerytalny,* Wrocław 2013
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/41350

Edyta Kowalczyk, *Poglądy ekonomiczne i polityczne Wincentego Stysia,* Wrocław 2013
Dostęp online: https://www.bibliotekacyfrowa.pl/dlibra/publication/41538/edition/42804

Daria Kostecka-Jurczyk, *Porozumienia kooperacyjne w polskim i europejskim prawie konkurencji*, Wrocław 2014
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/53673

Slalom podatkowy przedsiębiorcy, red. Paweł Borszowski, Andrzej Huchla, seria „Studia Finansowoprawne" nr 3, Wrocław 2014
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/44254

Regulacja MIFID – skutki prawne dla funkcjonowania rynku finansowego, red. Edyta Rutkowska-Tomaszewska, seria „Studia Finansowoprawne" nr 4, Wrocław 2014
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/46684

Joanna Helios, Wioletta Jedlecka, *Podstawowe pojęcia prawa i prawoznawstwa dla ekonomistów,* Wrocław 2015
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/67006

Aktualne i wybrane problemy z zakresu bankowości, podatków i rachunkowości, red. Anna Ćwiąkała-Małys, Edyta Rutkowska-Tomaszewska, seria „Finanse i Rachunkowość" nr 1, Wrocław 2015
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/79911

Sytuacja przedsiębiorcy w warunkach pokryzysowych, red. Anna Ćwiąkała-Małys, Edyta Rutkowska-Tomaszewska, seria „Finanse i Rachunkowość" nr 2, Wrocław 2016
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/80599

Finanse wybranych jednostek organizacyjnych, red. Anna Ćwiąkała-Małys, Edyta Rutkowska-Tomaszewska, Marzena Karpińska, seria „Finanse i Rachunkowość" nr 3, Wrocław 2017
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/94981

Joanna Helios, Wioletta Jedlecka, *Podstawy prawoznawstwa dla ekonomistów. Materiały do ćwiczeń,* Wrocław 2017
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/82253

Własność w prawie i gospodarce, red. Urszula Kalina-Prasznic, Wrocław 2017
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/83823

Prawno-finansowe systemy funkcjonowania wybranych jednostek organizacyjnych, red. Anna Ćwiąkała-Małys, Marzena Karpińska, seria „Finanse i Rachunkowość" nr 4, Wrocław 2018
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/99310

Wyzwania współczesnych finansów – wybrane problemy, red. Anna Ćwiąkała-Małys, Marzena Karpińska, seria „Finanse i Rachunkowość" nr 5, Wrocław 2018
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/101224

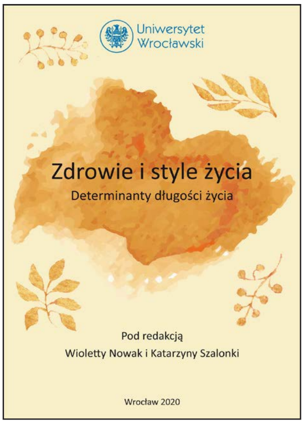
Gospodarka światowa po kryzysie 2008 r., red. Jarosław Kundera, Wrocław 2018
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/95558

Małgorzata Niklewicz-Pijaczyńska, *System patentowy w gospodarowaniu wiedzą. Ekonomia wiedzy technicznej skodyfikowanej*, Wrocław 2019
Dostęp online: http://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/102011

Zdrowie i style życia. Wyzwania ekonomiczne i społeczne, red. Wioletta Nowak, Katarzyna Szalonka, Wrocław 2019
Dostęp online: https://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/107876

Mateusz Machaj, *Esej o teorii firmy*, Wrocław 2019
Dostęp online: https://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/113873

Anna Ćwiąkała-Małys, Małgorzata Durbajło-Mrowiec, Paweł Łagowski, *Diagnostyka efektywności wykorzystania zasobów lecznictwa szpitalnego*, Wrocław 2020
Dostęp online: https://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/116241



Zdrowie i style życia. Determinanty długości życia, red. Wioletta Nowak, Katarzyna Szalonka, Wrocław 2020
Dostęp online:
https://www.bibliotekacyfrowa.pl/dlibra/publication/128103

Mateusz Machaj, *Stopa procentowa a struktura produkcji*, Wrocław 2020
Dostęp online:
https://www.bibliotekacyfrowa.pl/dlibra/publication/129478

Monika Mościbrodzka, *Zachowania i anomalie na rynku NewConnect*, Wrocław 2020
Dostęp online:
https://www.bibliotekacyfrowa.pl/publication/134276

Główny zamysł monografii polegający na kompleksowym opisie problematyki ubezpieczeń złożonych związanych z ubezpieczeniem na życie, obejmujący sferę instytucjonalno-prawną, ekonomiczną i badawczą, związaną z planowaniem inwestycyjnym i z tworzeniem nowych produktów ubezpieczeniowych został dobrze zrealizowany. Co więcej, materiał matematyczno-formalny został wzbogacony o wartościowe przykłady praktyczne. […] Takie ujęcie sprawia, że monografia może być adresowana do studentów kierunków ekonomicznych, matematycznych czy podyplomowych z zakresu ubezpieczeń, jak również może stanowić interesującą pozycję dla wymagających praktyków (aktuariuszy), zwłaszcza że monografia zawiera bogatą literaturę, która może być użyteczna dla osób interesujących się pracą badawczą w zakresie ubezpieczeń.

Z recenzji wydawniczej prof. dr. hab. Tadeusza Bednarskiego

Recenzowana monografia koncentruje się na ubezpieczeniach na życie z opcjami dodatkowymi w ujęciu aktuarialnym, wypełniając tym samym lukę w dostępnej literaturze przedmiotu. Autorka zaprezentowała wiele przykładów praktycznych, które stanowią istotną wartość dodaną monografii.

[…] recenzowana monografia stanie się ważną pozycją literaturową nie tylko dla studentów kierunków matematycznych, ekonomicznych, ale także dla aktuariuszy i osób przygotowujących się do egzaminu aktuarialnego.

Z recenzji wydawniczej dr hab. Patrycji Kowalczyk-Rólczyńskiej, prof. UEW

ISBN 978-83-66601-40-6 (druk)
ISBN 978-83-66601-41-3 (online)